**UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA**
DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

# Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores

## Màster de recerca en didàctica de les matemàtiques i de les ciències experimentals

Autor

Manuel Goizueta

Tutora

Núria Planas Raig

12/09/2011

**UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA**
DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

# Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores

## Màster de recerca en didàctica de les matemàtiques i de les ciències experimentals

Autor

Manuel Goizueta

Tutora

Núria Planas Raig

12/09/2011

**Al gran demiurgo, por la inquietante simpleza**

**A los compañeros de viaje, por eso, por la compañía**

Todo Ser cree ser todo, pero nada es todo: todo es apenas nada. El ave es nada, porque vuela. El pez es todo, porque nada.

Suami Sali Maharishi Baba

Contrariwise, if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic.

Lewis Carroll

# Agradecimientos

Al Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de la Universitat Autónoma de Barcelona por haber hecho posible, de muchos modos, la concreción de este trabajo.

A los organizadores y participantes del seminario *Divendres de Rececerca* por sus cosejos, su apoyo y por construir y mantener este espacio de reflexión colectiva.

A la Dra. Núria Planas Raig, mi estimadísima tutora, por su paciencia, por su sapiencia, su imprescindible colaboración y, sobre todo, por su amistad.

Al cuerpo docente de la edición 2010-2011 del màster oficial *Inici a la Recerca en Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals* por todas sus enseñanzas y colaboración.

A mis compañeros del máster por ser la contraparte vital de la experiencia que compartimos. En particular a Ángel Oliva y a Josep Lluís Cañadilla por su participación en este estudio, por su disponibilidad y por compartir conmigo sus ideas.

A los profesores que participaron en esta investigación por su colaboración desinteresada y por el tiempo dedicado.

A mis amigos por su afecto, por su apoyo, por aguantarme y por supuesto. En especial a Arturo y a Nancy, grandes inspiradores aún en la ausencia.

A mi madre por su incansable apoyo, por sus mil y un enseñanzas, por su ejemplo y porque sin su inapreciable participación nada de esto hubiera sido posible.

A mi padre por su lucha, aún tristemente vigente.

# Índice

# 1. Introducción

Este trabajo, “Interpretaciones del profesorado de matemáticas sobre prácticas argumentativas en el aula de secundaria”, se inscribe en el *Màster de Inici a la Recerca en Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, de la Universitat Autònoma de Barcelona, en su edición de 2010-2011*. Se trata de un trabajo enmarcado en el Proyecto “Estudio sobre el desarrollo de competencias discursivas en el aula de matemáticas”, EDU-2009-07113, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

Se ha querido que el título del trabajo sea descriptivo, de modo que incluya los conceptos más relevantes que se pretenden abordar: interpretaciones del profesorado de matemáticas y prácticas argumentativas en el aula de matemáticas de la etapa secundaria. Éste es un trabajo exploratorio orientado hacia un estudio de Tesis Doctoral, donde los datos no serán solo reportados por cuestionarios estáticos tal como ocurre en esta ocasión. En los próximos cursos académicos, nuestra intención será trabajar *la argumentación en la clase de matemáticas*, con datos de clases. Insistimos, pues, en la necesidad de entender el estudio actual dentro de una línea de continuidad donde se irá de las interpretaciones del profesorado a sus prácticas de enseñanza y aprendizaje. Por otra parte, al proyectar el análisis futuro con datos reales de clase, queremos facilitar puentes entre la perspectiva más teórica adoptada en el trabajo actual y la perspectiva más práctica asociada al manejo de episodios auténticos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por último, aprovechamos esta introducción para destacar una de las funciones principales de este estudio. Desde el punto de vista de la formación investigadora del autor, el desarrollo del trabajo ha supuesto un doble reto. Por un lado, para la elaboración de un marco teórico sólido, se han llevado a cabo diversas lecturas de textos científicos esenciales dentro de la literatura del área relativa a la argumentación matemática. Por otro lado, para la implementación de un marco metodológico útil, también se han realizado numerosas lecturas de textos científicos sobre los principios y modos de aplicación de la Teoría Fundamentada. En síntesis, además del carácter científico del trabajo y sus resultados, éste tiene un importante carácter formativo.

# 2. Justificación

Desde una perspectiva científica, está plenamente justificada la temática de este trabajo. Boero, Douek, Dreyfus, Duval, o bien Llinares y Gutiérrez en España, son algunos de los investigadores reconocidos que trabajan dentro del campo de la *argumentación*. No son pocos los debates académicos vigentes en relación con este tema.

Por otro lado, actualmente, en gran cantidad de currículos escolares, se plantea la idea de que la educación (y por lo tanto la educación matemática) debe contribuir a la formación de ciudadanos reflexivos, críticos, con capacidad de análisis y con ciertas aptitudes y capacidades que deben ser desarrolladas en el contexto de la educación obligatoria.

Un representante actual de esta línea que tiene gran influencia en la elaboración de currículos y que moviliza grandes esfuerzos a nivel internacional, marcando pautas y estándares compartidos entre muchos países, es el Proyecto PISA. Uno de los conceptos clave del Proyecto, en lo que a educación matemática se refiere, es el de “alfabetización matemática”. Según Rico (2006), en el contexto de PISA la alfabetización matemática se refiere a la competencia matemática general relacionada con “las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones” (Rico, op. cit., p. 276). En este marco la idea de alfabetización matemática no queda reducida a meros aspectos instrumentales sino más bien potenciada a través de una interpretación que comprende la capacidad de los estudiantes para utilizar las matemáticas al lidiar con problemas cotidianos. Dentro de este marco, argumentar es una habilidad básica en la puesta en marcha de conocimientos matemáticos para la resolución de problemas.

De ahí que, desde una perspectiva social, y entendiendo el quehacer matemático como una tarea esencialmente argumentativa, también quede justificada la relevancia de investigar en este campo.

Hay, además, importantes dificultades de enseñanza y aprendizaje en este sentido. Según Boero, Douek y Ferrari (2002), considerando el rol fundamental de la mediación del profesor en el desarrollo de competencias lingüísticas en actividades matemáticas por parte de los estudiantes, las dificultades del profesorado deben tomarse en cuenta. Algunos obstáculos provienen de la idea ampliamente difundida de que el lenguaje ordinario no es un instrumento eficiente para desarrollar y comunicar conocimiento matemático por su redundancia y falta de precisión. Lo cual parece apoyado por la usual descripción de las matemáticas como sistema formal, que recurre exclusivamente al tratamiento sintáctico de las relaciones matemáticas.

En relación con los objetivos de la educación matemática, De Gamboa, Planas y Edo (2010) sostienen que es esencial el trabajo de prácticas argumentativas, donde se aprenda a reconocer argumentos válidos y a desarrollar razonamientos analíticos que permitan la adquisición progresiva de habilidades en este sentido. Estos autores destacan que los alumnos presentan dificultades en el desarrollo de argumentaciones matemáticas durante su aprendizaje en la escuela, que las causas de estas dificultades son múltiples y que "algunas de ellas se ven reforzadas por las dificultades de argumentación que a su vez experimentan algunos maestros de matemáticas" (De Gamboa et al., op. cit., p. 35).

Dreyfus, en un documento inédito de 2011 elaborado para la European Mathematical Society, dice lo siguiente: "una persona con esquemas de demostración empíricos tenderá a demostrar una afirmación (matemática) mostrando que se sostiene en casos específicos. La misma persona probablemente espere que una afirmación (considerada verdadera en el sentido matemático y por tanto válida sin excepciones en este contexto) admita contraejemplos." Este autor sostiene que los estudiantes comienzan con esquemas empíricos de demostración y que muchos de ellos continúan actuando así por muchos años, incluso en el nivel medio superior de la educación, e incluso que algunos docentes mantienen estos esquemas. Basándose en diversos estudios, Dreyfus sostiene que gran cantidad de estudiantes, de profesores en formación inicial e incluso profesores en funciones utilizan fundamentalmente esquemas de prueba empírica.

De acuerdo con todas estas consideraciones, podemos decir que: La argumentación es una habilidad básica esencial que pretende desarrollarse en el marco de la educación obligatoria. Los resultados hasta ahora son más bien magros ya sea en cuanto al alumnado como al profesorado. Así, en el contexto del aula de matemáticas, la argumentación constituye una problemática real y compleja y un fértil terreno para la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

# 3. Revisión de literatura y marco conceptual

Este capítulo pretende dar cuenta de la perspectiva conceptual que hemos asumido en la realización del estudio, posibilitando una lectura consistente de la memoria y haciendo transparentes las influencias con las que hemos contado y que han condicionado las tareas realizadas durante la investigación.

El núcleo del capítulo gira en torno al concepto de *argumentación en el aula de matemáticas*; iniciamos exponiendo los aspectos más generales para acercarnos, en fases sucesivas, a los conceptos seminales para su caracterización.

Fundamos la perspectiva más amplia recurriendo a la noción clásica de *Discurso* de Gee (1999) y contextualizamos a partir de ésta la práctica argumentativa dentro del aula de matemáticas estableciendo algunas de las relaciones existentes entre el registro lingüístico ordinario y los registros especializados utilizados en la actividad matemática en general y en el aula en particular.

En un subsiguiente acercamiento caracterizamos la argumentación distinguiéndola de la explicación y, posteriormente, de la demostración. Ofrecemos una perspectiva cognitiva pertinente acerca de la producción matemática introduciendo, para este fin, conceptos fundamentales para describir operativamente la argumentación en el aula de matemáticas y acercarnos así a la construcción de un concepto propio e integrador.

Recuperamos el modelo de argumentación de Toulmin como descriptor estructural válido, aunque no como descriptor conceptual. La operativización de este constructo resulta el instrumento esencial en el diseño del instrumento de recogida de datos.

## *3.1 Discursos y registros lingüísticos*

Para Gee (1999), y así lo consideramos nosotros, *Discursos* (con mayúsculas)[1] son “modos de estar en el mundo, o formas de vida que integran palabras, actos, valores, creencias, actitudes e identidades sociales, así como gestos, miradas, posiciones corporales y vestidos. Un Discurso es algo así como un kit de identidad que viene completo, con el disfraz apropiado e instrucciones para actuar, hablar y

[1] En cambio, con *discurso* Gee se refiere, simplemente, al lenguaje en uso. Así lo entendemos también nosotros y lo diferenciamos de *Discurso*.

usualmente escribir, para poder asumir un rol social particular que otros reconocerán" (p. 127).

Este reconocimiento (tanto del otro como de nosotros mismos) nos incluye como miembros de grupos distinguibles, como cierto "tipo de persona" involucrada a través de la representación de una identidad socialmente situada en prácticas sociales distintivas y repetibles asociadas con el grupo. Estas identidades pueden corresponder al pandillero de suburbio, a la feminista posmoderna, al profesor de matemáticas de secundaria, al alumno exitoso o al fracasado. Las personas que pertenecen a estos grupos vehiculan, a través de sus Discursos, esta pertenencia.

El profesor de matemáticas posee (y por lo tanto es vehículo de) un Discurso particular, profesionalizador, en relación con las matemáticas y su enseñanza que juega un rol esencial dentro del aula, proponiendo a los alumnos ideas sobre qué son las matemáticas, cuál es su lenguaje y cuáles son sus métodos, cuándo y cómo se utilizan, en qué contextos de aplicación, mediante qué mecanismos se regula su coherencia interna, sus métodos de validación, sus modos de articulación con otros Discursos, etc. El Discurso del profesor influye en la producción discursiva en el aula y modula sus rasgos distintivos estableciendo condiciones de pertenencia a la práctica social específica de enseñar y aprender matemáticas en una institución.

Particularmente interesantes para nosotros son los registros lingüísticos asociados a distintas prácticas sociales. En primera instancia podemos considerar los *registros ordinarios*[2], los que todo el mundo usa "cotidianamente" de modo corriente y sin que estén asociados a ningún tipo de especialidad (astrofísico, pandillero, feminista posmoderna, profesor de matemáticas de secundaria, etc.). Todos los registros ordinarios son "igualmente buenos", en el sentido de ser gobernados por reglas complejas y ser comunicativos. Aunque un grupo puede designar alguna variedad como estándar y otras como no-estándar, ésta es una distinción social y política y no lingüística, pues desde este punto de vista cualquier registro cumple igualmente bien con todas sus funciones. En cambio, un *registro especializado*[3] "es un patrón de dispositivos gramaticales asociados a una determinada práctica social, actividad, o identidad socialmente situada" (Gee, op. cit., p. 36). Un registro especializado es un modo particular de usar la lengua para poner en práctica una identidad social. Desde esta perspectiva, "hacer matemáticas" en el aula implica utilizar los registros

[2] Gee los llama *lenguas vernáculas.*
[3] Gee los llama *lenguas sociales.*

característicos de esta actividad. Prácticamente todo el mundo llega a adquirir registros especializados a lo largo de su vida utilizándolos para propósitos especiales (religión, asalto con violencia, especialidades académicas, etc.); pero aunque la mayoría de las personas no tienen mayores problemas para adquirir y utilizar los registros ordinarios (excluyendo casos de merma funcional o imposibilidad por causa biológica), la adquisición, dominio y uso de registros especializados comporta dificultades. Aunque un maestro destaque ventajas y características de un estilo de lenguaje, haga uso de un metalenguaje específico para ello y esto reporte cierta eficacia en su adquisición, nadie puede describir (y por lo tanto enseñar abiertamente) todas las características y combinaciones de características que conforman un registro. "Parece que la inmersión en la práctica y la participación con aquellos que hablan (y escriben) este lenguaje social es todavía crucial" (Gee, op. cit., p. 9).

La apropiación de registros específicos en el contexto escolar es de importancia capital en la práctica educativa, pues determina, entre otras cosas, quién es "periférico" y quien no lo es respecto a una determinada práctica dentro del aula (en nuestro caso, enseñar y aprender matemáticas). Para Gee, el aprendizaje consiste en el cambio de patrones de participación en prácticas sociales específicas; idea que es ampliamente retomada por Sfard (2001) para particularizar el caso del aprendizaje matemático y la participación en prácticas sociales del aula.

Dado que en el aula el profesor funge como vehículo de la práctica matemática, tanto la aprehensión, por parte de los alumnos, de los registros específicos como la adecuación de sus patrones de participación a las prácticas matemáticas guardan una estrecha relación con los Discursos de éste acerca de las matemáticas.

Si, por otro lado, consideramos los registros especializados utilizados por los matemáticos en su quehacer (e.g., la factura y comunicación de producciones matemáticas), el uso intensivo de palabras, estructuras y formas lingüísticas características de registros ordinarios es evidente, aunque en este contexto de uso consignen significados distintos (Boero y otros, 2002). Así, los términos *potencia*, *raíz*, *grupo* o *función* son lexemas que adquieren significados particulares cuando se les considera adscritos a la práctica matemática.

En el aula de matemáticas de secundaria se verifica el uso de registros propios de la actividad matemática e invariablemente se verifica también el uso de registros habituales de conversación. El uso de estos dos tipos de registro, los saltos tácitos entre ellos y el uso distinto que se hace en ambos de palabras y estructuras comunes son habitual fuente de dificultades, no sólo en su correcta utilización sino también en la construcción de ideas y conceptos matemáticos (Boero y otros, op. cit.). De modo que los registros ordinarios, inextricablemente implicados en la práctica matemática, juegan un papel central en el proceso de enseñanza aprendizaje. Por lo tanto, un cierto grado de competencia en el uso de estos registros es un requisito importante para la apropiación de cualquier registro propio de la práctica matemática. Además, como sugieren Boero y sus colegas, es también necesaria una cierta conciencia metalingüística para gestionar las transiciones entre uno y otro: la conciencia de que distintos registros y variedades de lenguaje tienen diferentes propósitos.

Todavía siguiendo a Boero y sus colegas, destacamos tres actuaciones del profesor en relación con la práctica matemática del aula: 1) mediador indirecto, cuando selecciona y utiliza producciones lingüísticas de sus alumnos; 2) mediador semiótico directo, cuando provee a sus alumnos con expresiones lingüísticas apropiadas para codificar y controlar sus procesos de pensamiento y de producción; y 3) mediador cultural, cuando provee a sus alumnos de modelos válidos de actuación matemática (lingüísticos o de otra índole). D'Amore (1999) ya destaca que algunos de los problemas de los alumnos en el desarrollo de competencias argumentativas se relacionan con la concreción, más o menos afortunada, de estas actuaciones.

Si bien apelamos en reducida medida a estas nociones (más bien generales para nuestros propósitos) en lo subsiguiente, cuando nos referimos a la argumentación, a las prácticas argumentativas del aula, a las expectativas de profesores y alumnos sobre estas prácticas, etc., tenemos en mente estas consideraciones. Esto condiciona nuestras interpretaciones a lo largo del proceso de análisis de datos.

## *3.2 Argumentación*

Hasta aquí hemos hecho un uso "abusivo", pero intencionado, del término argumentación, obviando su definición. A continuación ofrecemos nuestra interpretación de este término, aclarando que es consistente con lo dicho hasta ahora.

Al igual que Boero, Douek y Ferrari (2002) y Douek (2007), definimos *argumentación* (en general) siguiendo al Webster Dictionary[4] como "el acto de formar razones, hacer

[4] Véase: http://www.merriam-webster.com/dictionary/argumentation (consultado en julio de 2011 )

inducciones, sacar conclusiones y aplicarlas al caso en discusión”. Usamos el término argumentación tanto para designar el proceso de producir un discurso lógicamente conectado (no necesariamente deductivo) sobre un tema como para el producto de este proceso. La acepción adecuada se reconocerá según el contexto de referencia.

Un *argumento* es, para nosotros y en coincidencia con los autores mencionados, una razón o razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición, opinión o medida. De ahí, una *argumentación* es el acto de de formar razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición, opinión o medida.

Considerando de este modo la argumentación, es evidente cuán crucial resulta en la práctica matemática del aula y en general en la producción discursiva en contexto escolar como parte del desarrollo competencial de los estudiantes. Sin embargo, parece haber una cierta controversia acerca del estatus que la argumentación debe tener en el aula de matemáticas. Situando la argumentación junto a la *explicación* y a la *demostración* y entendiendo que las tres prácticas están presentes en la enseñanza de las matemáticas de secundaria (exploramos esta idea en detalle más adelante), una cuestión a dirimir es el rol que cada una de éstas debe jugar en este contexto.

Para la etapa de educación secundaria, Mamona-Downs y Downs (2002) sostienen que la mayoría de los investigadores defiende que demostrar debe implicar esencialmente convencer y explicar, aunque una consistente minoría insiste en que el desarrollo de la precisión y del lenguaje matemáticos dirigidos hacia la noción de “demostración formal” y sus métodos deben ser componentes esenciales de las matemáticas escolares. Estos autores dicen que “la demostración como dominio de la educación, es algo difícil de elucidar. Implica cuestiones como la formalidad, el rigor y la lógica y al mismo tiempo la persuasión, el significado, la generalización, la generación de ideas para resolver un problema dado, además de la manipulación de estructuras complejas” (Mamona-Downs y Downs, op. cit., p. 174).

El debate anterior se da en un momento en que incluso a nivel de los matemáticos profesionales la noción de demostración se encuentra, de algún modo, en discusión debido al creciente uso de las nuevas tecnologías en la investigación en matemáticas y la aceptación de las denominadas “matemáticas experimentales”. Una nueva perspectiva acerca de la *conjetura* y, según recientes estudios, la aceptación por parte de publicaciones especializadas de trabajos “menos rigurosos” estaría cambiando la noción inicial de algunos matemáticos sobre la demostración por una más “laxa”. A diferencia de lo que ocurre en la etapa de enseñanza secundaria, en la educación universitaria, y en concreto en los grados de especialización en matemáticas, no hay grandes dudas sobre la necesidad del tratamiento formal y explícito de la demostración (Mamona-Downs y Downs, op. cit., p. 175).

En esta sección hemos dejado establecida nuestra interpretación de argumentación de un modo bastante genérico. No obstante, los datos y el colectivo de profesorado con los que trabajamos son particulares de una práctica específica (la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula de secundaria). Por lo tanto, son igualmente importantes los términos de argumentación matemática y práctica argumentativa en el aula de matemáticas. De la integración de partes de estos términos hablamos en la sección que sigue. Por otra parte, nuestro marco discursivo deja entrever la fuerte conexión que suponemos entre argumentación y práctica argumentativa.

## *3.3 Explicar - Argumentar - Demostrar*

Para generar un concepto de argumentación operativo, dentro de este estudio, optamos por ubicar la argumentación, junto con la explicación y la demostración, así como el vínculo funcional entre estos tres conceptos, dentro de la práctica matemática del aula. Para lograr este propósito, nos basamos en la perspectiva de Duval (1999, 2007), complementada con las de Boero y otros (2002), Boero (2011) y Douek (2007).

### Explicar - Argumentar

Consideramos que *explicar* implica hacer comprensible un hecho o fenómeno presentándolo en conexión con otros hechos o fenómenos dentro de un sistema de relaciones y funcionamiento coherente. De modo que la explicación tiene una función primordialmente descriptiva y por lo tanto el valor epistémico de las proposiciones involucradas en la explicación juega un rol secundario. La explicación pone en evidencia las conexiones entre distintos fenómenos dentro de un sistema mecánico, teórico, teleológico, etc. en el que el fenómeno a explicar encuentra su lugar.

Son las preguntas *de re* (“por qué **se produce** este fenómeno”, “por qué **se obtiene** este resultado”) las que requieren explicaciones; en cambio, las *de dicto* (“por qué **afirmas** que…”, “por qué **respondes** que…”) requieren que se proponga al menos un argumento (Duval, 1999, p. 6).

La explicación pretende hacer comprensible un dato, una proposición, un fenómeno, un resultado, etc.; su éxito reside en la coherencia cognitiva de la descripción del sistema. En cambio, en el caso de la argumentación, las razones esgrimidas pretenden comunicar su *fuerza* a la tesis propuesta (*el caso en cuestión*). Pretenden, finalmente, modificar su valor epistémico y tornarlo positivo (plausible, obvio, necesario).

Un argumento se acepta o se rechaza considerando dos criterios, a saber su *fuerza* y su *pertinencia*. Para que un argumento sea pertinente es necesario que comparta campo semántico con la tesis que pretende apoyar, es decir, los contenidos semánticos del argumento y de la tesis deben sobreponerse, pues de otro modo se estaría hablando “de otra cosa” (difícilmente se podrá justificar una conjetura geométrica a partir de la fauna microbiana del pepino español). El examen de pertinencia de un argumento se basa en los respectivos contenidos de sus partes.

La fuerza de un argumento depende de dos factores. Por un lado, un argumento tendrá fuerza si no se le puede oponer otro argumento: debe resistir un contrargumento, es decir, “no tener réplica”. Por otro lado, un argumento tendrá fuerza en función del valor epistémico que tenga para la persona a la que se dirige: puede ser positivo (evidente, necesario, auténtico…) o negativo (absurdo, posible, inverosímil…). Un argumento que resiste objeciones y que tiene un valor epistémico positivo es un argumento fuerte. Un argumento de este tipo suele implicar la adhesión a la tesis, tanto por parte de otros como de uno mismo.

Siguiendo a Toulmin (2007), sostenemos que los estándares empleados para evaluar argumentos dependen del campo argumentativo al que nos refiramos, es decir, del contexto en el que se inscribe la práctica argumentativa en cuestión. Los términos que se usan para calificar los argumentos son propios y particulares de esta práctica y su contexto; es decir, son invariantes respecto al campo argumentativo.

Aunque hasta aquí hemos procurado distinguir la explicación de la argumentación, coincidimos con Duval (1999) en que no es posible establecer una línea neta entre ambas prácticas: no es siempre posible decidir si estamos frente a una argumentación o frente a una explicación en función de las características intrínsecas de una proposición[5].

Coincidimos también con Duval en que ciertos tipos de conectivos son “marcadores habituales”; de modo que los discursos argumentativos “suelen” incluir conectivos argumentativos (también, pero, sin embargo, aunque, etc.) y los discursos explicativos “suelen” incluir conectivos organizativos (porque, en consecuencia, por lo tanto, etc.). Para nuestro estudio, este hecho ha sido considerado tanto en el diseño del instrumento de recogida de datos como en el análisis de los datos.

## Demostrar - Argumentar desde una perspectiva cognitiva

Consideramos que la perspectiva cognitiva presentada por Duval (1999, 2007) acerca de la demostración y de la argumentación es adecuada y nos basaremos en ella para continuar desarrollando el marco conceptual de este estudio. Somos conscientes de que la noción de demostración cuenta con una literatura muy amplia; sin embargo, sólo revisaremos los conceptos que están directamente implicados en nuestro trabajo.

Duval (2007) considera que todo razonamiento funciona a través de proposiciones, sean éstas explícitas o implícitas. Estas proposiciones tienen un *valor* en sí mismas y un *estatus operacional* en la relación entre ellas. Estos dos componentes son aspectos constitutivos del significado de una proposición. En primer lugar, el valor queda conformado por tres dimensiones: 1) una relativa al contenido, el valor semántico; 2) otra relativa al conocimiento, el valor epistémico (marcado usualmente por términos modales: obvio, posible, improbable, necesario, etc.); y 3) una más relativa a la lógica, el valor de lógico (verdadero, falso, indecidible). El valor epistémico está en relación con el modo en que alguien entiende una proposición, depende de los conocimientos previos, pues en función de éstos el sujeto entenderá el contenido de la proposición (una proposición sobre geometría puede parecer posible al profano y resultar imposible al punto de vista del matemático). Cuando se argumenta, lo que se pretende es modificar el valor epistémico de la tesis y establecer un valor positivo (no necesariamente *necesario*). En cambio, en matemáticas, la clave de la demostración está en la relación del valor epistémico *necesario* y el valor lógico *verdadero*. En

[5] En Duval (1999) p. 41 puede verse un ejemplo desarrollado que ilustra este hecho.

segundo lugar, el *estatus operacional* se refiere, en un razonamiento deductivo, al rol funcional de las proposiciones en la cadena deductiva.

Existe una cuestión epistemológica fundamental, si consideramos un hecho o fenómeno: Mientras que en otros campos del conocimiento el valor lógico *verdadero* está conectado con distintos valores epistémicos en función de la información con que se cuenta (puede ser proveniente de la observación, de instrumentos de medida o de cualquier otro dispositivo), en matemáticas la única conexión acordada es entre el valor lógico *verdadero* y el valor epistémico *necesario*. En otras áreas el valor epistémico de una proposición está conectado con la comprensión del contenido de dicha proposición, pero en matemáticas el valor epistémico depende primordialmente del estatus operacional de la proposición dentro de la teoría (hipótesis, teorema, tesis, etc.); lo que quiere decir que no podemos cambiar el valor epistémico de una proposición mediante un razonamiento por *necesario* si no conocemos su estatus como parte del significado de la proposición (Duval 2007, p. 139). Es decir, en una demostración matemática las proposiciones no intervienen (sólo) a través de sus contenidos semánticos sino (principalmente) mediadas por su estatus operacional.

Coincidimos con Duval (1999) en que poder reconocer una argumentación pasa por distinguirla de la explicación y de la demostración y en que los límites entre estos tres productos discursivos son difusos. Es sólo a través de la distinción del predominio de ciertos componentes dentro de una determinada expansión discursiva que podemos (no siempre) hacer esta distinción y no a través de la conformidad con un modelo o patrón discursivo o de la organización del discurso a partir de reglas precisas.

## Demostrar - Argumentar desde una perspectiva discursiva

Douek (2007), que recoge la perspectiva cognitiva de Duval como punto de partida de su investigación, considera que una de las principales dificultades que enfrentan los alumnos para acercarse a la demostración radica en su incapacidad para entender las diferencias operativas entre ésta y la argumentación ordinaria, así como el hecho de que utilizan formas y estructuras lingüísticas similares, complicando el discernimiento entre uno y otro registro. La autora, al igual que en Boero, Douek y Ferrari (2002), Boero (2011) y Camargo (2010), llama la atención acerca de la necesidad de distinguir entre dos acepciones comunes del término *demostración* en la literatura; por un lado en referencia a una actividad y, por el otro, a un producto específico obtenido en el marco de esta actividad.

Los matemáticos profesionales reportan su producción (demostraciones) a través de discursos que quedan inscritos dentro de una teoría de referencia compartida (que incluye ciertas reglas de producción, nociones y procedimientos). Estos productos presentan rasgos característicos, por un lado tanto la proposición-objetivo, aquella que se quiere validar, como las premisas, aquellas proposiciones que se consideran ciertas dentro de la teoría, se hacen sistemáticamente explícitas. Las proposiciones se organizan en una cadena deductiva explicitando los términos intermedios: cada conclusión parcial se recicla como la condición de aplicación de la siguiente inferencia. De este modo, la proposición objetivo se deduce necesariamente de las premisas y la validez de éstas es comunicada a la conclusión al interior de la teoría. En este sentido, la demostración matemática se parece a una “cadena de cálculos”. En cambio, el razonamiento argumentativo funciona por refuerzo u oposición de argumentos; en este proceso, las proposiciones asumidas como conclusiones de fases previas o como proposiciones compartidas son continuamente reinterpretadas en función de su valor epistémico. El paso de un argumento a otro se produce por conexión extrínseca.

Boero, Douek y Ferrari (2002), Douek (2007) e Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007) evidencian que las actividades emprendidas por los matemáticos en sus investigaciones distan mucho de reproducir los esquemas deductivos, rigurosos y lineales de los productos que obtienen. Boero, Douek y Ferrari (2002) y Douek (2007) señalan que algunas de las dificultades que reviste la aproximación a la demostración en las matemáticas escolares provienen de la confusión entre la demostración como proceso y la demostración como producto. Cuando las matemáticas se presentan como una teoría formal basada en demostraciones lineales y rigurosas, los procesos de pensamiento involucrados quedan modelados por esta forma de presentación, haciendo que parezcan rasgos característicos y necesarios en la producción matemática en general, en detrimento de procesos más dinámicos y creativos.

Estudiando cómo un grupo universitario de estudiantes de matemáticas lleva a cabo actividades involucradas en el proceso de demostración, Douek (2007) evidencia la búsqueda de significado y de herramientas interpretativas en el uso de conocimientos tanto implícitos como explícitos, de meta conocimientos acerca de las operaciones a realizar en el marco de la tarea y de las representaciones externas de todos éstos. Los estudiantes recurren a argumentos semánticamente fundados en el marco de la actividad demostrativa y esta necesidad es parte de la actividad matemática. La autora sostiene que “los conocimientos de referencia implicados en las actividades de conjetura y demostración realizadas por los estudiantes no son todos ellos parte de un cuerpo institucionalizado (o institucionalizable) de referencias matemáticas. Se observó cómo representaciones apropiadas, no estandarizadas, de conocimientos de referencia explícitos tuvieron un rol importante en la práctica de los estudiantes. De esto se infirió su función como *medios de interpretación*" (Douek, op. cit., p. 168). La inferencia formal suele ser insuficiente y, entonces, los argumentos semánticamente fundados resultan críticos en el proceso de producción matemática. El trabajo constructivo-reflexivo en matemáticas no se desarrolla sólo mediante expresiones formales, se necesita una interpretación semánticamente consistente de éstas.

Douek (2007) también señala que demostrar una conjetura requiere una intensa actividad argumentativa basada en "transformaciones" de la situación representada por la aserción. Un ejemplo en este sentido es el uso de metáforas (*grounding metaphors*), que se muestra sumamente importante en la actividad demostrativa y en el desarrollo de conocimiento matemático. El uso de metáforas ilustra, a su vez, la "complejidad semántica" involucrada en el proceso de demostrar.

Desde esta perspectiva, las diferencias entre las actividades de *demostrar* y *argumentar* parecen aún más difusas y la descripción de Duval, más bien cercana a la demostración como producto, resulta insuficiente. Coincidimos tanto con Douek (2007) como con Camargo (2010) en que siguiendo el análisis de Duval acerca de la argumentación parece que no hubiera para ésta un cuerpo de referencias reconocido o reconocible cuando para la demostración, en cambio, éste existe sistemáticamente. Aunque las referencias extramatemáticas (tanto explícitas como implícitas) utilizadas por los estudiantes en la búsqueda de coherencia semántica no se puedan reconocer como un cuerpo "institucionalizado", éstas se evidencian al ser operativizadas dentro de la actividad matemática. Es al conjunto de estas referencias que Douek llama *corpus de referencia*. Una referencia no es objeto de duda, su veracidad, y por lo tanto su operatividad, es fáctica y este hecho está social e históricamente determinado.

La argumentación no sería posible si no hubiera un corpus de referencia parcialmente compartido, que permita a los participantes considerar que hablan del mismo tema y que entienden las referencias involucradas de modos similares que posibilitan la transmisión de significados, para apoyar los pasos del razonamiento. El corpus de referencia (tal vez debería ser "los corpus de referencia") para la argumentación cotidiana está social e históricamente determinado y es, en gran medida, implícito. En el aula de matemáticas de secundaria conviven, pues, un corpus de referencia asociable con los contenidos y prácticas matemáticos que corresponden a este nivel y este otro sobre el que Douek llama la atención. En lo que sigue, llamaremos *corpus de referencia* matemático al primero y *corpus de referencia extramatemático* al segundo cuando sea pertinente distinguirlos.

Destacamos que la demostración matemática se basa en un cuerpo de referencias adscribibles a una teoría deliberadamente coherente; en cambio la argumentación puede recurrir a distintas referencias y a distintas teorías que no tengan un marco común y explícito (o explicitable) que garantice la coherencia.

Siguiendo a Camargo (2010), usamos el término *actividad demostrativa* para referirnos al "conjunto de actividades que apoyan e impulsan la producción de una demostración matemática" (p. 48); mientras que usamos el término *demostrar* para referirnos al conjunto de acciones emprendidas para obtener una demostración-producto con las características que hemos descrito en párrafos anteriores.

A partir de lo dicho hasta aquí resulta claro que la argumentación es una práctica social contextualizada. Como tal, consideramos que hablar de *argumentación*, en general, puede resultar confuso y dar lugar a ambigüedades. En lo subsiguiente usaremos el término *argumentación en el aula de matemáticas*, que acota adecuadamente el término de cara a crear un instrumento de recogida de datos que elimine, en cierta medida, algunas de estas ambigüedades.

Para representar esquemáticamente la argumentación utilizaremos, como lo hacen Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007), el modelo de Toulmin (Figura 1).

D – dato
G – garantía
R – refuerzo
Ref – condiciones de refutación
CM – calificador modal
C – conclusión (tesis)

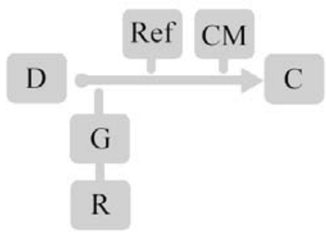



Figura 1. Esquema de Toulmin para la argumentación

Aunque consideramos que el modelo de Toulmin para la argumentación no es capaz de dar cuenta por sí mismo de la naturaleza contextual de la argumentación y de los aspectos semánticos y epistémicos de las partes que consigna, argüimos que es válido como descriptor estructural e incorporamos otras instancias de control sobre estas cuestiones. Lo operativizamos, en el marco de nuestra investigación, para la creación del instrumento de recogida de datos así como para mantener cierto control sobre aspectos estructurales de las proposiciones en éste involucradas y por lo tanto como descriptor en el proceso de análisis de datos. En este proceso de operativización tomamos en cuenta los resultados de Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007). Estos autores evidencian cómo el uso (habitual en investigaciones previas) de una versión restringida del modelo de Toulmin en la que se excluye el Calificador Modal falla al pretender dar cuenta del rol de la argumentación en la producción matemática, constriñendo a pensar exclusivamente en términos de argumentos con conclusiones absolutas (relativas al valor epistémico *necesario*). En el estudio, que llevan a cabo con matemáticos posgraduados, se hace patente la imposibilidad estructural del modelo restringido al intentar describir las argumentaciones registradas y la necesidad (e idoneidad) de utilizar el modelo completo.

# 4. Cuestión y objetivos de investigación

A partir de la revisión de la literatura hemos puesto de relieve la importancia de los *D*iscursos del profesorado acerca de la argumentación en la producción discursiva de las prácticas del aula. Hemos destacado los *D/d*iscursos argumentativos en el acercamiento de los estudiantes a procedimientos propios de la práctica matemática y en particular a la demostración. Hemos establecido una relación funcional entre la argumentación en el aula de matemáticas y la actividad demostrativa. Hemos también argüido que la distinción entre explicación, argumentación y demostración es una actividad compleja (no siempre realizable), esencial dentro del aula de matemáticas.

Consideramos entonces que investigar los distintos aspectos y dimensiones de las prácticas argumentativas del aula de matemáticas de secundaria es de gran interés, tanto teórico como social. Dentro de este campo de estudio, considerando las limitaciones de espacio, el marco escolar y los requerimientos temporales, restringimos la investigación a interpretaciones de profesorado de secundaria acerca de la argumentación en el aula de matemáticas. Estas interpretaciones revisten capital importancia dentro de las prácticas argumentativas del aula, condicionando las actuaciones del profesor y vehiculando modos de participación en estas prácticas. Así pues, la cuestión principal de investigación queda formulada del siguiente modo:

**Cuestión- Para un grupo de profesorado de matemáticas de educación secundaria, ¿cuáles son las interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas y qué involucran?**

Con base en todo esto, nuestra intención es explorar las interpretaciones del profesorado acerca de la argumentación en el aula de matemáticas. Para ello nos planteamos dos objetivos de investigación que tendrán que contribuir a comprender mejor lo que se incluye en la cuestión principal del estudio. Estos objetivos son:

**Objetivo 1- Elaborar perfiles individuales del profesorado relativos a sus interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas.**

**Objetivo 2- Elaborar temas presentes en más de un perfil relativos a algunas de las interpretaciones del profesorado.**

# 5. Enfoque metodológico

Para la consecución de los objetivos de la investigación se planteó llevar a cabo un estudio cualitativo de carácter exploratorio. A grandes rasgos, se empleó un método interpretativo inductivo en el análisis de los datos recogidos. Se diseñó, con este propósito, un cuestionario basado en episodios ficticios de aula que se pasó a un pequeño grupo de profesores. Los datos así obtenidos se analizaron mediante el software de análisis cualitativo de datos Atlas.ti.

El análisis se llevó a cabo partiendo de las líneas generales sobre argumentación en el aula de matemáticas proporcionadas por el marco teórico. Esto nos permitió posicionarnos dentro del área y generar las primeras "líneas de análisis" mediante las cuales abordar la revisión de datos. No se comenzó este proceso con un modelo de análisis cerrado, definido previamente, para caracterizar los aspectos relevantes de las respuestas escritas de los profesores. La intención era construir interpretativa e inductivamente estas caracterizaciones a partir de un proceso cíclico de análisis de datos. De ahí nuestra caracterización de este estudio.

Mediante nuestro estudio, no pretendemos comprobar supuestos establecidos *a priori* acerca de las interpretaciones del profesorado de secundaria sobre la argumentación en el aula de matemáticas, sino indagar algunas de estas interpretaciones a partir de los datos obtenidos. Esto da un fuerte carácter exploratorio al trabajo.

Nos inspiramos en métodos y procedimientos de la Teoría Fundamentada de Glaser y Strauss (1965) para proceder, a sabiendas de que las características del estudio no consienten una investigación plenamente adscrita a esta corriente. En particular, aplicamos los principios del Método de Comparación Constante (cuya formulación es históricamente anterior a la propia Teoría Fundamentada) en el análisis de los datos, pero no tenemos en cuenta el criterio de muestreo teórico.

La intención, finalmente, es construir temas narrativos que emerjan inductivamente del proceso de análisis interpretativo de los datos. Caracterizar los aspectos relevantes de las respuestas de los participantes permite elaborar perfiles individuales de tipo discursivo (Objetivo 1), y es a partir de la consecución de estos perfiles que somos capaces de elaborar temas emergentes (Objetivo 2). De este modo, los dos objetivos de la investigación quedan fuertemente interrelacionados.

## *5.1 Recogida de datos: Instrumento y participantes*

Considerando las dimensiones del trabajo (el margen temporal con el que se contaba, el volumen de trabajo posible, la necesidad de emprender lecturas formativas preliminares, el marco escolar en el que se inscribía, etc.) y los objetivos de investigación propuestos, se tomó la decisión de diseñar un cuestionario abierto (en el sentido de Cohen y Manion, 2002) basado en episodios ficticios de clase. Aunque se barajó la posibilidad de realizar entrevistas *a posteriori* con el fin de contar con más elementos para triangular los datos, se descartó la opción por cuestiones temporales y de volumen de trabajo. En cambio, se decidió encarar la creación de un cuestionario "multidimensional" para lograr nuestros propósitos; es decir, un cuestionario que explore la cuestión de investigación desde distintos puntos de vista; en nuestro caso a partir de dimensiones duales complementarias: discursivo/metadiscursivo, teórico/operativo. Abundaremos en este sentido más adelante.

### Características del cuestionario

En esta sección, se describen y justifican el proceso de elaboración y los contenidos del cuestionario que constituyó el instrumento de recogida de datos. En general, puede decirse que los episodios ficticios de clase son los ejes fundamentales que articulan este instrumento y que, a su vez, muestran nuestra propia visión sobre la complejidad de la práctica argumentativa en clase de matemáticas.

#### Primera parte del cuestionario: Los episodios

Los dos episodios que se incorporaron (ver anexo 1) están basados en anécdotas personales de aula de nivel secundaria (edades 14-15 años) del autor. Se consideraron pertinentes, entre otros motivos, por considerar que el grado de comprensión era plausible sin necesidad de hacer ulteriores aclaraciones y en sintonía con las edades escolares en las que estamos interesados. Cada uno de los episodios aparece guiado por una tarea que se consigna como antecedente del mismo y lo contextualiza.

En el diseño final se consignaron aspectos y nociones relevantes de nuestro marco conceptual a fin de obtener episodios "ricos" en características que resultan conceptualmente interesantes dentro de nuestro estudio y, por lo tanto, importantes para la consecución de nuestros objetivos. Es decir, con el fin de obtener caracterizaciones vinculantes, en relación con nuestro marco conceptual, resultó crítico optimizar la consignación de los elementos de este marco dentro de los cuestionarios. Aclaramos que estos elementos no son variables de la investigación; su inclusión pretende únicamente exponer a los profesores a episodios "conceptualmente ricos" en relación con nuestro marco teórico para que proyecten sus interpretaciones en torno a la noción de argumentación en el aula de matemáticas.

En las intervenciones individuales de los episodios se consignan:

- Argumentaciones esquemáticamente completas e incompletas desde el punto de vista del modelo de Toulmin, es decir, donde las partes de la argumentación son todas explícitas[6] o donde algunas están implícitas; incluimos distintas combinaciones para esta última posibilidad.

- *Datos*, *garantías* y *conclusiones* con distintos valores lógicos (verdadero – falso) que, a su vez, están asociados a contenidos y referencias plausiblemente asociadas con la etapa de educación secundaria.

- Contenidos y referencias tanto matemáticas como extramatemáticas adscribibles a un corpus de referencia reconocible para esta etapa.

- Registros semióticos de representación pertinentes y no-pertinentes en el aula de matemáticas de secundaria (decidimos sobre pertinencia con base en D'Amore, 1999, y su uso de distintos registros semióticos de representación en el marco del *contrato didáctico)*.

- Calificadores modales distinguibles: *necesario* y *posible*.

- Conectivos organizativos, argumentativos y combinatorios explícitos (también, pero, sin embargo, aunque, porque, en consecuencia, por lo tanto, etc.).

[6] No consideramos aquí el refuerzo de la garantía, pues éste suele estar implícito en las argumentaciones habituales del aula de matemáticas de secundaria.

En los anexos presentamos los dos episodios tal y como fueron literalmente incluidos en el cuestionario individual que se pasó a los participantes.

Se generó un documento para controlar las características de estos episodios y dar cuenta de ellas. Más adelante se incorporaría al flujo de trabajo relativo al análisis como *documento primario* dentro de la *unidad hermenéutica* correspondiente en el entorno de Atlas.ti (discutiremos más adelante su utilidad para el análisis de datos). Aclaramos que este documento refleja solamente nuestras interpretaciones de los episodios y que éstas encuentran sustento conceptual en nuestro marco teórico, sin que esto quiera decir, consecuentemente con nuestro concepto de argumentación en el aula de matemáticas, que no hay otras interpretaciones posibles y adecuadas.

Se consideró cada una de las intervenciones como unidad a describir. Por otra parte, se consideraron los vínculos, sinergias e interacciones entre ellas en las descripciones, es decir, se hicieron consideraciones acerca de cómo se rescataban, reconformaban y reinterpretaban elementos de intervenciones anteriores para otorgar sentido y significado en cada intervención.

Presentamos en los anexos una versión adaptada de este documento que excluye elementos propios del flujo de trabajo en el entorno de Atlas.ti, sin detrimento de los contenidos relevantes en este momento.

### Segunda parte del cuestionario: Las preguntas

Se diseñaron tres conjuntos de preguntas/tareas, uno por cada episodio (que se agregó inmediatamente después de éste) y uno último de carácter más general. A continuación reproducimos literalmente los tres conjuntos de preguntas/tareas.

**<u>Cuestionario Tarea 1</u>**

1.1. Fijándote en las intervenciones de **A** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

1.2. Ahora haz lo mismo con las intervenciones de **B**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

1.3. De nuevo haz lo mismo con las intervenciones de **C**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

**<u>Cuestionario Tarea 2</u>**

2.1. Fijándote en las intervenciones de **D** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

2.2. Ahora fíjate en **E.** Respecto a lo que ha dicho **D**, ¿qué echa en falta este alumno?

2.3. ¿Hay argumentación en lo que dice **E**? ¿Cuál? **Explica por qué es argumentación**.

**Cuestionario General**

3.1. Explica si has tenido algunas dificultades al identificar argumentaciones. ¿Cuáles?

3.2. ¿Hay diferencias entre las argumentaciones que has identificado a lo largo de todo el cuestionario? ¿Cuáles?

3.3. ¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas?

3.4. Si deseas añadir algo más, por favor hazlo en este espacio.

Ubicamos las preguntas/tareas de los cuestionarios en cuatro grupos diferenciados según la “naturaleza” de las respuestas que se pretenden obtener:

- Preguntas/tareas vinculadas a los episodios que solicitan explicaciones por parte de los profesores. Para llevar a cabo esta tarea los participantes deben operativizar e instrumentalizar[7] sus interpretaciones acerca de la argumentación sin hacerlas necesariamente explícitas. Esta operativización / instrumentalización refleja interpretaciones particulares de la argumentación y éstas quedarán plasmadas de modo discernible en sus respuestas, de modo que serán susceptibles de emerger en un análisis posterior. En este sentido resulta crítica la interacción entre las distintas características de los episodios y las interpretaciones instrumentalizadas. Este hecho justifica, a su vez, el esfuerzo por generar episodios ricos en características vinculadas a aspectos relevantes del marco teórico.

- La pregunta/tarea 3.1 demanda una reflexión metadiscursiva acerca de las tareas realizadas en los bloques precedentes; restringe este tipo de reflexión a aspectos problemáticos de las tareas sin sugerir asociaciones apriorísticas. La intención de esta pregunta/tarea es posibilitar que los participantes compartan reflexiones acerca de las tareas previamente solicitadas.

- La pregunta/tarea 3.2 pretende enfocar la atención del profesor en las características de las intervenciones y posibilitar una disquisición sobre éstas por su parte.

[7] Entendemos *instrumentalizar* en su acepción más amplia según el diccionario de la Real Academia Española de la lengua: Utilizar algo o a alguien como instrumento para conseguir un fin. Somos conscientes, sin embargo, del elevado valor connotado del término en teorías del área.

- La pregunta/tarea 3.3 solicita una caracterización explícita de la *argumentación en clase de matemáticas*. En este caso posibilitamos que el participante articule de manera coherente y deliberada sus interpretaciones (como mínimo, algunas de ellas) acerca de la argumentación. Aunque se pensó en incluir esta pregunta/tarea al inicio del cuestionario de modo que los participantes se posicionaran comprometiendo una caracterización explícita, se decidió incluirla al final pues consideramos que la experiencia otorgada por el trabajo previo con el cuestionario posibilitaría la aparición de caracterizaciones más ricas, fruto de una mayor y multidimensional reflexión.

- La pregunta/tarea 3.4 pretende, simplemente, dar cabida a ideas de los participantes que no encuentren su lugar entre los otros ítems del cuestionario y se aplica siguiendo las recomendaciones de Cohen y Manion (2002).

En resumen, el cuestionario pretende dar cuenta de aspectos y dimensiones diversas de las interpretaciones de los participantes acerca de la argumentación: aspectos centrados en la operativización / instrumentalización de sus interpretaciones, aspectos metadiscursivos, aspectos centrados en el discernimiento de características de enunciados y, finalmente, una caracterización explícita por escrito.

La intención detrás de este diseño es posibilitar la triangulación de los datos al interior del cuestionario destacando, en particular, unas ciertas líneas de coherencia en los discursos de los participantes. La falta de oportunidad por cuestiones temporales de recabar más datos mediante otros instrumentos hace que estos rasgos sean esenciales a la hora de otorgar certeza y validez a nuestros resultados.

## Pilotaje del instrumento

Para obtener la versión final se llevó a cabo, en primer lugar, el pilotaje de una versión preliminar del cuestionario, que se hizo llegar a una profesora de secundaria con experiencia también en el campo de la investigación en Didáctica de las Matemáticas. A raíz de este pilotaje, se introdujeron algunos cambios significativos que dieron forma a la versión definitiva del cuestionario. Por ejemplo, se tuvo en cuenta la recomendación de reducir el tamaño del cuestionario para que se tardara menos tiempo en responderlo. También se siguió la sugerencia de hacer más realistas algunas de las intervenciones de los participantes en los episodios creados.

En general, se revisó la redacción para eliminar modismos regionales no-locales asociados al origen del autor. Se indexaron numéricamente las intervenciones para facilitar la referencia a éstas por parte de los participantes. Se redujo de tres a dos el número de episodios consignados y consecuentemente de cuatro a tres los grupos de preguntas/tareas. El criterio para la selección de los episodios fue prescindir del menor número de características (en el sentido que explicamos antes) posible.

Se redimensionaron los diseños de la Tarea 2 a fin de acentuar el efecto deseado. Tras la revisión de las respuestas de la profesora colaboradora en el pilotaje y las conversaciones informales con ella respecto al cuestionario, se consideró que el re-diseño estaba bien orientado según los propósitos de la investigación.

## Participantes

Se usaron distintos procedimientos para seleccionar el grupo de profesorado colaborador, aunque principalmente se recurrió al contacto con profesores conocidos con quienes algún miembro del Proyecto había colaborado con anterioridad. El grupo quedó, finalmente, conformado por diez profesores de matemáticas de secundaria con algunos años de experiencia docente y en activo durante el curso 2010-2011. Se consideró que era un número adecuado, que tendría que proporcionar gran cantidad de información dentro de límites manejables en el marco temporal del presente trabajo. No fueron consideradas otras características individuales para la selección, excepto el hecho de equilibrar en cierta medida el número de mujeres y hombres. Por supuesto, al tratarse de profesorado colaborador en proyectos y/o grupos de trabajo anteriores, debe tenerse en cuenta que hubo una selección implícita de profesorado supuestamente experto desde un punto de vista profesional.

En primera instancia se hizo llegar el cuestionario a los profesores vía correo electrónico en formato pdf (sin derechos para modificarlo) y se les solicitó que lo devolvieran ya sea del mismo modo o bien *en mano*. Supusimos que esto los impelería a imprimirlo y llenarlo a mano y consideramos deseable esta homogeneidad. En cambio sólo seis participantes lo hicieron de este modo. Los restantes cuatro adaptaron los cuestionarios para llenarlos haciendo uso de ordenadores y utilizando distintas estrategias para llevar a cabo los subrayados (resaltado, cita explícita, parafraseos). Pensamos que este hecho no tiene implicaciones relevantes dentro de nuestro estudio ya que los métodos que sustituyeron al subrayado son equivalentes para nuestros propósitos.

Se informó al profesorado someramente acerca de la investigación destacando que se relacionaba con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, a fin de que tuvieran este hecho como referencia. Se les sugirió un plazo de diez días para la devolución sin establecer límites (el último cuestionario fue devuelto tres semanas después de su consignación). Se les indicó que podían anexar hojas si los espacios destinados a las respuestas resultaban insuficientes.

## *5.2 Procedimientos de análisis y acciones de investigación*

El marco metodológico de nuestro trabajo se inspira en la Teoría Fundamentada desarrollada por Glaser y Strauss (1965). En particular, nuestro método es inductivo e interpretativo y procuramos aplicar las máximas del Método de Comparación Constate en el proceso de análisis según lo exponen estos autores y lo complementan Bernard y Gery (2010), Boeije (2002) y Tilbury y Walford (1996). Nuestros métodos de codificación de datos (que hemos denominado codificación abierta y codificación axial) se han adecuado a este posicionamiento. Por otra parte, la consecución de los objetivos es el resultado de la implementación de este marco metodológico. Por ello, los objetivos no se concatenan causalmente, es decir, el primero no es condición previa para la consecución del segundo. Dado que nuestro método implica la iteración de ciertos procedimientos, los logros parciales para cada uno de los objetivos nos obligan a reinterpretar lo hecho en pos de los otros; de modo que los resultados en torno a los dos objetivos, por la propia naturaleza del método, se consiguen a la vez de modo integrador y se revisan conjuntamente.

A continuación describimos las acciones realizadas, no necesariamente en el orden de presentación, para la consecución de los objetivos.

### Acciones preparatorias para el análisis

Dado que consideramos el software de análisis de datos cualitativos Atlas.ti un recurso esencial dentro de nuestra investigación, tanto los datos como los documentos de control de las características de los episodios se adaptaron al flujo de trabajo propio de este entorno. Se volcaron los contenidos de los cuestionarios en documentos compatibles y adaptados al entorno Atlas.ti. Se establecieron protocolos básicos para consignar las distintas estrategias de los profesores a la hora de dar explicaciones escritas sobre intervenciones identificadas como argumentación (e. g., cuando dan una única explicación para distintas intervenciones o cuando consideran más de una intervención como una única argumentación). Mediante descriptores constituidos a partir del marco conceptual, se establecieron protocolos para reportar los subrayados hechos por los participantes como respuesta a las demandas del cuestionario. Estos datos fueron posteriormente excluidos del proceso de análisis pues se consideró que no consentían interpretaciones e inferencias suficientemente sostenibles.

## Creación de códigos *a priori*

Se crearon y definieron *códigos a priori* a partir de nociones del marco conceptual, así como códigos con fines operativos y estructurales en relación con el flujo de trabajo en Atlas.ti. Dado que los códigos son, por su naturaleza, sintéticos y encapsulan multitud de significados y nociones complejas, entendemos que no son inteligibles per se, pero que quedan correctamente definidos y plenos de significado gracias a la ayuda de descriptores y a partir de su vínculo con nuestro marco conceptual. Por otra parte, el conjunto total de códigos no se corresponde con un único sistema de codificación ni se sitúa en una misma fase del análisis.

En el contexto de nuestra investigación, los códigos tienen diferentes funciones: a nivel estructural permiten movernos a través de los *documentos primarios* controlando el aspecto o los aspectos bajo examen (e. g., examinar las caracterizaciones realizadas por los profesores acerca de la argumentación en el aula de matemáticas); algunos consignan aspectos y nociones teóricas que emergen de nuestro marco conceptual, pensados para codificar los datos en función de sus contenidos (e. g. *#FA aportar datos para apoyar una tesis*, *#V epistémico*); otros consignan las características de los episodios y permiten relacionar éstas con otros elementos (e. g. *#esq. Completo*, *#D fundación semántica*). Hay más tipos, tal como se puede observar en el anexo 3, donde listamos los códigos creados *a priori* así como sus descripciones, cuando resultan pertinentes (excluimos de este listado los códigos que indexan las partes del cuestionario y de los documentos de control dada su cuantía y su poca relevancia científica para la lectura de esta memoria).

Si bien las descripciones de los códigos sugieren nociones definidas, las condiciones de aplicabilidad se fueron delimitando y reconfigurando durante todo el proceso de codificación y análisis como consecuencia de continuas reflexiones en este sentido. De hecho, a lo largo del estudio consideramos estos códigos como provisionales, pues estuvieron sujetos a modificaciones o reinterpretaciones producto de la reflexión, *a* *posteriori*, que implicó el análisis. Esto es consecuencia de la aplicación del Método de Comparación Constante y es precisamente uno de los aspectos que nos llevan a hablar de un modelo interpretativo-inductivo de análisis.

## Codificación abierta, codificación axial, redacción de memos y emergencia de nuevos códigos

Se realizó la *codificación abierta* (según nuestra interpretación de la terminología usada por Glaser y Strauss, 1965, y habiendo consultado el trabajo específico al respecto de Strauss y Corbin, 1998) teniendo en mente el marco conceptual e incluyendo en el proceso los códigos creados *a priori*.

Durante este proceso y para procurar que el etiquetado sea lo menos idiosincrásico posible, dos investigadoras, una de ellas novel, replicaron parcialmente el ejercicio. Se compararon los resultados obtenidos en la asignación de códigos y se establecieron parámetros de aplicabilidad para los códigos así como de certeza en la realización de la tarea. Este procedimiento se realizó en distintas ocasiones para poner bajo examen incluso los códigos creados *a posteriori*.

Cuando algún concepto resultó de particular interés, se procedió a hacer una codificación axial (según nuestra interpretación de la terminología usada por Glaser y Strauss, 1965, y de acuerdo a lo leído en Strauss y Corbin, 1998); es decir, se codificó exclusivamente para ese concepto, ya sea en un único cuestionario (longitudinalmente) o atendiendo a todo el conjunto (transversalmente). Si era el caso, paralelamente se buscaron evidencias negativas, contrarias o complementarias. Los elementos así obtenidos se compararon sistemáticamente con la intención de llegar a una mejor comprensión y de crear nuevos conceptos y códigos que incorporasen estas reflexiones. En algunas ocasiones no fue necesario modificar el código, sino únicamente incluir o variar información en el descriptor asociado.

Paralelamente se redactaron memos, es decir, textos breves, donde se consignaron interpretaciones y análisis parciales. La redacción de estos memos resultó clave en el proceso, pues a partir de éstos se profundizó en el análisis y se elaboraron los productos que posibilitaron la consecución de los objetivos. Los memos, además, ayudaron a recordar fenómenos observados en fases anteriores del análisis.

La combinación e iteración cíclica, no necesariamente secuencial, de estos tres procedimientos (codificación abierta, codificación axial y redacción de memos), aunada al análisis y reflexión sistemáticos en torno a los cuestionarios de los profesores dio, como uno de sus resultados, la creación inductiva de nuevos grupos de códigos, que denominamos *a posteriori*. Éstos, a su vez, se integraron al proceso de codificado y redactado de memos, enriqueciendo así el proceso, y fueron objeto de reflexión y redelimitación posterior, tanto en el sentido de su definición como de su rango de aplicabilidad. En el anexo 4 consignamos estos códigos junto con sus definiciones.

Entendemos que el proceso llevado a cabo consiste, como lo describen Bernard y Gery (2010), en un procedimiento cíclico de *fragmentar y conectar*. Por un lado, la codificación (abierta y axial) destaca cuestiones particulares e individualizables presentes en los textos y, por otro, a través de la comparación constante plasmada en la redacción de memos, procuramos conectar estas cuestiones para articularlas de modo incluyente generando conceptos y temas que los abarquen. Nuestra intención, coherentemente con el segundo objetivo de investigación, fue desarrollar un marco capaz de dar cuenta de temas presentes en discursos del profesorado participante.

De modo sintético e inspirándonos en Boeije (2002), presentamos en las dos tablas siguientes, Tabla 1 y Tabla 2, el proceso de comparación y codificación, así como sus aspectos más relevantes.

<table>
<tr><th>Tipo de Comparación</th><th>Acción investigativa</th><th>Propósito</th><th>Preguntas guía</th><th>Resultados parciales</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Comparación dentro de un mismo cuestionario (longitudinal)</td><td>-Codificación a partir de los códigos creados a priori.<br><br>-Codificación abierta</td><td>-Fragmentar los cuestionarios en piezas conceptuales.<br><br>-Optimizar el flujo de trabajo en el entorno Atlas.ti</td><td rowspan="3">-¿Cómo se relacionan entre sí los fragmentos codificados (con el mismo código y con códigos distintos)?<br><br>-¿Cuáles son los temas centrales en el discurso escrito del profesor?<br><br>-¿Cuál es el foco de su caracterización explícita?<br><br>-¿Qué relación hay entre los distintos aspectos que consignan las preguntas?<br><br>-¿Hay contradicciones o</td><td rowspan="3">-Códigos emergentes (que se incorporan al proceso de codificación)<br><br>-Relaciones entre códigos (que pueden constituir nuevos códigos)<br><br>-Ejemplos de relaciones entre códigos en los cuestionarios<br><br>-Conformación provisional de temas emergentes</td></tr>
<tr><td>-Codificación axial</td><td>-Comparar pasajes con el mismo código<br><br>-Identificar casos “negativos”<br><br>-Considerar la coherencia discursiva</td></tr>
<tr><td>-Redacción de memos</td><td>-Considerar los rangos de aplicabilidad de los códigos<br><br>-Vincular inductivamente los códigos</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | -Desarrollar comprensión y generar ideas para la emergencia de temas | ejemplos “negativos”? | |

Tabla 1. Procesos principales en el análisis dentro de un cuestionario

| Tipo de Comparación | Acción investigativa | Propósito | Preguntas guía | Resultados parciales |
|---|---|---|---|---|
| Comparación entre distintos cuestionarios (transversal) | -Codificación abierta | -Elaborar criterios de comparación entre cuestionarios | -¿Cómo se relacionan entre sí los fragmentos codificados (con el mismo código y con códigos distintos)?<br><br>-¿Cómo podemos comparar entre sí los cuestionarios?<br><br>-¿Hablan los participantes de los mismos temas?<br><br>-¿En qué se parecen y en qué se diferencian sus caracterizaciones y otros aspectos de sus respuestas?<br><br>-¿Utilizan los mismas estrategias para explicar por qué son argumentaciones los pasajes identificados?<br><br>-¿Cómo se combinan distintos conceptos entre distintos participantes?<br><br>-¿Qué interpretación podemos hacer de lo que verificamos? | -Saturación teórica (Glaser y Strauss, 1965)<br><br>-Emergencia de códigos relativos a la comparación entre participantes<br><br>-Continuidad en el proceso de construcción de temas emergentes<br><br>-Establecimiento de límites de aplicabilidad de los códigos y definiciones consistentes |
| | -Codificación axial | -Avanzar en la construcción de perfiles individuales<br><br>-Determinar límites de aplicación de los códigos<br><br>-Avanzar en la construcción de categorías | | |
| | -Redacción de memos | -Considerar los rangos de aplicabilidad de los códigos<br><br>-Vincular inductivamente los códigos<br><br>-Desarrollar comprensión y generar ideas para la emergencia de temas | | |

Tabla 2. Procesos principales en el análisis entre cuestionarios

El proceso descrito hasta aquí continuó hasta el punto de haber codificado exhaustivamente a partir de los códigos y familias de códigos emergentes y no haber emergencia de nuevos códigos o reconsideraciones acerca de los códigos surgidos en el proceso. En ese momento se valoró como alcanzado el *punto de saturación teórica* (Boeije, 2002). Esto no quiere decir que este proceso llegara a su fin por considerarse completo o terminado, sino que, a partir de este punto, el enfoque del análisis se centró en la búsqueda, a partir de la revisión y la reflexión acerca de los códigos asignados, de cuestiones centrales presentes en los cuestionarios.

Una aclaración resulta indispensable para esta fase del análisis. Cuando desde el punto de vista de la Teoría Fundamentada era necesario realizar un muestreo teórico, diseñado a partir de las conjeturas y conceptualizaciones alcanzadas, con base en el cual obtener datos complementarios para continuar con el proceso (Glaser y Strauss, 1965), nuestro estudio se limitó a la revisión exhaustiva de datos ya obtenidos. Esto fue motivado, sobre todo, por la limitación temporal. Sin embargo, destacamos que, haciendo consideraciones a este respecto, el estudio fue diseñado de modo que las características individuales de los participantes no fueron variables incorporadas y, por lo tanto, no era un requisito, desde el punto de vista metodológico, un muestreo teórico que implicara nuevos participantes. Reconocemos, sin embargo, que esta decisión constituye una limitación del estudio y, consecuentemente, de la envergadura de sus resultados. Entrevistas diseñadas *ad hoc* y aplicadas posteriormente hubiera aportado datos de valía para nuestros propósitos. Aunque nuestro estudio se inspira en los procesos de la Teoría Fundamentada, no podemos, pues, adscribirlo plenamente a este marco en vista de limitaciones procedimentales impuestas.

## Caracterización de aspectos relevantes en los cuestionarios y construcción de los perfiles individuales

A partir de este punto, se procedió a explorar sistemáticamente las relaciones y conjeturas consignadas en los memos obtenidos como producto de la codificación y análisis llevados a cabo. Este proceso puso de manifiesto aspectos relevantes y/o frecuentes en los cuestionarios, y evidenciables a través de la interrelación entre los códigos asignados y su frecuencia, consintiendo la identificación y construcción insipientes de temas presentes tanto en cuestionarios individuales como en el conjunto de éstos. Durante este proceso algunas conjeturas fueron adquiriendo consistencia y fundamento con base en evidencias identificadas; en cambio, otras conjeturas fueron rechazadas por inconsistentes o se mostraron carentes de fundamento.

A partir de y paralelamente a este procedimiento se realizó el análisis por separado de cada uno de los cuestionarios, trabajando fragmentariamente a partir de las distintas dimensiones del cuestionario (*caracterización*, *reflexión*, *explicaciones*, etc.) para, más tarde, considerar relaciones evidenciables entre estas dimensiones.

Los resultados de este proceso consintieron, procediendo de manera inductiva, sintética, sistemática e integradora, la elaboración de los perfiles individuales de los participantes y, con ello, la consecución del primero de nuestros objetivos.

## *5.3 Emergencia y elaboración de temas*

En Planas, Font y Edo (2009), se utiliza el modelo de Van Manen (1990) para la elaboración de temas emergentes a partir del análisis de contenidos temáticos en un proceso cíclico de comparación constante. Estos autores describen el tema emergente como la configuración narrativa y sintética de los aspectos más relevantes aparecidos tras la interpretación repetida y triangulada de un conjunto de datos cualitativos. Se trata de abstraer parte de lo esencial por medio de la búsqueda de consenso entre más de un investigador familiarizado con los mismos datos y un marco teórico de referencia similar. En este sentido, no estamos ante un procedimiento mecánico, sino fuertemente influenciado por los encargados de construir la narración en forma de tema.

La emergencia y posterior elaboración de los temas que presentamos como resultado del estudio y que dan cuenta de nuestro segundo objetivo, encuentra sus precedentes en la totalidad del proceso de análisis, esencialmente ecléctico y orientado a dar sentido a la cuestión bajo estudio (Tilbury y Walford, 1996, hablan de ello). Este análisis apela a la sensibilidad del investigador para poner en relación el marco conceptual con los datos obtenidos sin que esto limite el estudio a la mera verificación de ideas preconcebidas. De modo que en el proceso se procedió inductivamente tratando de elucidar cuestiones fundamentales, generalmente no inmediatas, detectadas en los cuestionarios; desde las primeras etapas, más bien de índole descriptiva, hasta las últimas, de carácter explicativo.

Las primeras elaboraciones en este sentido vinieron sugeridas por el mismo diseño del cuestionario, tanto por la naturaleza de las distintas tareas solicitadas como por el diseño controlado de los episodios. Otras, en cambio, fueron implicadas por la emergencia, conformación y delimitación de los códigos (tanto de los códigos *a priori* como de los códigos *a posteriori*), por las relaciones observadas entre éstos y por las búsqueda deliberada de evidencia positiva para apoyar las conjeturas que de este modo se fueron conformando. Este proceso acontecía paralelamente a la codificación y análisis dirigido a la construcción de los perfiles individuales, nutriéndose de sus resultados parciales y precipitándose con su conformación ulterior. En la medida en que se avanzó en estos múltiples sentidos, la comprensión más profunda lograda a partir del análisis fue decantando los temas más relevantes involucrados en el análisis de los cuestionarios.

El uso del software de análisis de datos Atlas.ti fue esencial en estas fases, posibilitando la revisión sistemática de relaciones entre los códigos e incluso sugiriendo algunas de éstas; simplificando la exploración tanto longitudinal como transversal de los datos y, en general, propiciando un flujo de trabajo adecuado a las intenciones del estudio. La redacción de memos y su integración en la *unidad hermenéutica* resultaron de capital importancia para desarrollar y consignar conjeturas y reflexiones, en primera instancia, y, finalmente, para posibilitar la estructuración ordenada y sistemática de los perfiles y temas elaborados y con ello la consecución de nuestros objetivos de investigación.

Debido a la naturaleza y limitaciones del estudio, la elaboración de temas se centró en aquellos aspectos relevantes que consentían ser evidenciados a partir de los datos, relegando a la prospectiva del estudio las cuestiones que hubieren requerido una ulterior recolección de datos basada en un muestreo teórico.

## 5.4 Criterios de rigor y validez científica

Del mismo modo que se habla de la pertinencia de un argumento, he buscado en todo momento que las referencias del marco teórico y las acciones de investigación fueran pertinentes, es decir, estuvieran relacionadas y fueran útiles en la consecución de los objetivos de la investigación y en la aproximación a la cuestión planteada. Hay, por supuesto, acciones y detalles teóricos y prácticos que no se explicitan en esta memoria y que ayudarían a entender mejor el desarrollo de la investigación. Sin embargo, consideramos que hemos incluido información suficiente para comprender la idiosincrasia y el rigor del presente trabajo.

En cuanto a las cuestiones más específicas de rigor científico, hemos tenido en cuenta dos tipos de triangulación. En primer lugar y debido a que se ha trabajado con un único instrumento de recogida de datos, hemos sido cuidadosos en la triangulación interna del propio cuestionario por medio de la selección de preguntas/tareas y de enunciados en los episodios de clase. En segundo lugar y como consecuencia del matiz altamente interpretativo de nuestros métodos de análisis, hemos estado también atentos a la incorporación de varias miradas a los datos. En particular, esto significa que se han organizado seminarios de investigadores, contando entre ellos al autor, para revisar o bien analizar preliminarmente datos de los cuestionarios, códigos elaborados y candidatos a temas emergentes, entre otros aspectos. Aunque hubiera sido deseable una cantidad mayor de seminarios, el equipo humano del Proyecto ha facilitado en gran medida la triangulación de perspectivas.

De nuevo, por cuestiones de tiempo y otras limitaciones, en los casos en los que se tuvo dudas acerca de la plausibilidad de ciertas interpretaciones de datos, se recurrió principalmente a la triangulación de perspectivas dentro del equipo del Proyecto. No hubo, por tanto, una revisión de datos particulares que incluyera la consulta directa al profesorado participante. Si bien eventualmente se recurrió a nuestro conocimiento personal y profesional del profesorado, esto no debe considerarse suficiente. De cualquier modo, cuando la triangulación de perspectivas dentro del equipo del Proyecto y la recuperación del texto literal de los cuestionarios no permitió llegar a contenidos razonables para perfiles y temas, estos contenidos se desecharon.

Por otra parte, es difícil saber hasta qué punto hemos indicado lo más relevante de los datos por medio de los contenidos incluidos en los perfiles discursivos y en los temas emergentes. La relevancia tiene más bien que ver con la postura teórica que se adopta, y no tanto con una condición neutral u objetiva intrínseca a los datos. En este sentido, otro autor podría haber elaborado perfiles distintos y haber resaltado temas distintos con base en su propio posicionamiento teórico y trayectoria científica. Por ello consideramos de gran importancia haber establecido con claridad el lugar desde el cual investigamos, así como el marco teórico que asumimos.

# 6. Análisis y resultados

Estructuramos este capítulo en función de la consecución de los objetivos de la investigación. Esta estructura no da cuenta, plenamente, de los métodos de análisis empleados y su devenir según se consignan en el capítulo precedente. Esto pretende, sin embargo, revelar los aspectos más relevantes del proceso y conformar un texto que aporte coherencia y cohesión a los resultados obtenidos, sacrificando la consignación de los pormenores de la obtención de evidencias en favor de una presentación más clara y transparente de la construcción de las mismas.

Procedemos, en la primera sección, presentando sintética y resumidamente el análisis de los cuestionarios individuales, de los que, debido a su volumen total, incluimos sólo 3, relegando el resto al anexo 11. Los que se consignan en este capítulo fueron seleccionados por constituir casos particularmente interesantes por la riqueza de los análisis o paradigmáticos en relación con los temas construidos. En una siguiente sección, presentamos los perfiles individuales construidos con base en estos análisis. De este modo queda satisfecho nuestro primer objetivo de investigación:

> Objetivo 1. Elaborar perfiles individuales del profesorado relativos a sus interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas.

Una consideración se hace necesaria, dadas la dimensión de la investigación y las limitaciones ya declaradas del instrumento de recogida de datos. El análisis consigna, en gran medida, cuestiones especulativas. Ya que se tuvo la intensión de crear perfiles asertivos justificados largamente por las evidencias destacadas, consideramos que éstos no dan cuenta de toda la riqueza del proceso de análisis y sugerimos, entonces, la lectura a conciencia de los análisis consignados. En síntesis, el carácter discursivo de los perfiles requiere que su lectura y comprensión sea contextualizada en el marco del análisis que lleva hasta ellos.

En la última sección consignamos los dos temas construidos. En este caso también, el análisis llevado a cabo junto con el párrafo final que lo sintetiza es, desde nuestra perspectiva, una unidad que debe ser considerada al unísono, pues es sólo en esta unidad que los temas se revelan en todo su significado. De este modo, queda también satisfecho el segundo de nuestros objetivos:

> Objetivo 2. Elaborar temas presentes en más de un perfil relativos a algunas de las interpretaciones anteriores del profesorado.

## *6.1 Análisis de los cuestionarios individuales*

En lo que sigue y para cada caso de cuestionario, llamaremos *reflexión*, *distinción*, *caracterización* y *ampliación* a las respuestas literales a las preguntas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 respectivamente, mientras que bajo el epíteto *explicaciones* agruparemos las respuestas literales relativas a los episodios. Se presentan de modo fragmentario para permitir una lectura consistente que recoja fácilmente las diferencias entre las distintas dimensiones del cuestionario, sin que esto haya condicionado o sea fruto del análisis realizado. La visión integradora del análisis queda relegada a los perfiles individuales que posteriormente se presentan.

Recordamos que en *itálicas* y antecedidos por “#” nos referimos a los códigos utilizados, a cuyas definiciones se puede remitir el lector en los anexos 3 y 4.

### Análisis del cuestionario de P1

#### Análisis de la *caracterización* de P1

> Argumentar es aportar en un diálogo unos datos, referencias, afirmaciones… que intenten convencer a otra persona de la veracidad o falsedad de una idea inicial.

La caracterización de P1 se centra en la idea de "convencer a otra persona de la veracidad o falsedad de una idea inicial" e inscribe la práctica argumentativa en el contexto de un diálogo. De modo que la argumentación, para P1, es una actividad colectiva que tiene una finalidad bien definida en el contexto del aula de matemáticas.

Para P1 en el marco de la argumentación existe una "idea inicial" (que asociamos con la tesis de Toulmin) y unos "datos, referencias, afirmaciones" (que asociamos con los datos, garantías y refuerzos de Toulmin, sin querer decir que P1 los considere todos) que se articulan para convencer (no necesariamente demostrar) de la veracidad o falsedad de ésta. Aunque no podemos afirmarlo con certeza, al no adscribirse estos elementos a un corpus de referencia determinado, la frase de este profesor sugiere que estos elementos pueden ser tanto de índole matemática como extramatemática ya que a través de la argumentación se establece el valor epistémico de la “idea inicial”. En este sentido, su caracterización es poco contextual, pudiéndose asociar con actividades más amplias que trascienden el aula de matemáticas de secundaria.

En general, la caracterización de P1 es bastante laxa: aunque sugiera distintos elementos que se “aportan” con una finalidad concreta, no podemos definir sus características, o el modo en que estos se articulan para lograr su fin.

**Análisis de la *distinción* de P1**

La gran diferencia está en la tipología de las aportaciones de los alumnos para convencer a sus compañeros: numéricas, definiciones, metáforas, representaciones, gráficos…

La distinción de P1 se centra en los datos (posiblemente se refiere también a las garantías); este profesor distingue argumentaciones en función de su naturaleza (matemática, extramatemática) y del registro semiótico de representación utilizado. Por un lado y en sintonía con su caracterización, remarca la función argumentativa *convencer a otros* como finalidad de la argumentación. Por otro lado, considera la metáfora como un "tipo de aportación" válido en una argumentación.

**Análisis de la *reflexión* de P1**

En el episodio 2, en (1). He tenido que volver a leer el enunciado para comprobar si se especificaba el objetivo (“llevar la mayor cantidad de agua”) dado que no se especificaba en la pregunta.

En comparación con lo ya dicho en las respuestas anteriores, ahora no se aporta información relevante; aparentemente, P1 se refiere sólo a un problema en la comprensión del texto.

**Análisis de las *explicaciones* de P1**

**T1 (2)** “B rebate los cálculos de A, da los nuevos resultados y especifica por qué los anteriores no eran correctos”.

**T1 (4)** “Afirma que es una relación directamente proporcional y añade a (3) una comparación para que sea más fácil de imaginar”.

Por una parte, P1 considera cada intervención como unidad de análisis para realizar la identificación de argumentaciones, aunque considera las emisiones precedentes como antecedentes que otorgan coherencia y significado a cada intervención.

**T1 (1)** "Afirma que es una relación directamente proporcional, aporta unos cálculos y una referencia a la definición que respaldan su afirmación".

**T1 (2)** "B rebate los cálculos de A, da los nuevos resultados y especifica por qué los anteriores no eran correctos".

**T1 (15)** "Afirma una cosa y aporta lo que vieron en clase".

En los tres enunciados anteriores, además, se observa que a la demanda "explica por qué son argumentaciones" responde narrando lo que sucede en la intervención.

Aunque en general P1 es consistente con su caracterización, no destaca criterios generales que asocie a la argumentación como componentes de sus explicaciones, dejando abierta la identificación de estos elementos. Así, explicaciones como

**T1 (13)** "Afirma que no lo es porque no es una línea recta"

no permiten inferir interpretaciones generales acerca de la argumentación o acerca de la naturaleza, condición, uso, rol, etc. de los elementos que P1 consigna en sus explicaciones.

La instrumentalización que P1 realiza de sus ideas sobre argumentación produce narraciones explicativas que recogen el devenir de los episodios sin pautas generales reconocibles. Esto genera interrogantes del tipo ¿por qué reconoce T1 (4) como argumentación proponiendo T1 (3) como antecedente sin reconocerla como argumentación?

**T1 (4)** "Afirma que es una relación directamente proporcional y añade a (3) una comparación para que sea más fácil de imaginar".

P1 parece sugerir que "afirmar" y "añadir una comparación" son los elementos que hacen de T1 (4) una argumentación; sin embargo en el Episodio 2 encontramos estos elementos en algunas intervenciones y no identifica ninguna como argumentación. La naturaleza peculiar de este "afirmar" y "añadir una comparación" resulta indiscernible. En cambio, en la explicación que da para T1 (1):

**T1 (1)** "Afirma que es una relación directamente proporcional, aporta unos cálculos y una referencia a la definición que respaldan su afirmación".

encontramos elementos más claramente discernibles: se establece una tesis ("Afirma que es una relación directamente proporcional"), se presentan datos ("aporta unos cálculos") y se propone una garantía ("referencia a la definición") con un propósito explícito ("respaldan su afirmación"). En todo caso, los elementos que quedan de manifiesto generalmente en sus explicaciones son los datos, o los elementos que podrían funcionar como tales, de las intervenciones.

A pesar de que el foco de su caracterización es "convencer a otra persona de la veracidad o falsedad de una idea inicial", sus explicaciones no explicitan esta dimensión en ningún caso. Podemos llegar a suponer que esto "lo da por hecho". En cambio, cuando justifica por qué no son argumentaciones las intervenciones de D en el Episodio 2, se basa en la falta de interés por convencer al otro:

**T2 (1, 3, 4, 5)** "No argumenta porque no tiene interés de convencer a la otra persona. No tiene interés en persuadirla. Lo da por hecho, 'es evidente'".

El motivo para no considerar estas intervenciones como argumentación es de índole teleológico: no tienen la finalidad que "deberían" tener. Desde nuestro punto de vista las intervenciones sí pretenden convencer, llamando la atención sobre la información visual, procurando establecer para ésta el valor epistémico "evidente".

Para P1 el valor epistémico de los datos en T1 (6) y en T2 (1) es similar: evidente. Esto significa que en ambos se obtiene información "evidente" a partir de la representación gráfica (la relación se modela mediante una línea recta y X tiene mayor volumen que Y, respectivamente). Por un lado, en el primero habría que considerar los pre-supuestos matemáticos subyacentes (los alumnos saben que ciertos tipos de relaciones se modelan gráficamente como líneas rectas con ciertas características y que bajo ciertas condiciones las parejas obtenidas en una tabla son suficientes para obtener información general sobre una relación). Por otro lado, en el segundo habría que considerar aquellos que provienen de la experiencia con representaciones gráficas de objetos (los alumnos saben que ciertas condiciones de la representación gráfica de objetos implican ciertas relaciones entre las propiedades de los objetos reales). En el primer caso son de naturaleza matemática y en el segundo no. P1 reconoce el primero pero el segundo no. Consideramos que esto está ligado al contrato didáctico y al estatus tanto del corpus de referencia matemático como extramatemático dentro de las prácticas del aula: el corpus de referencia matemático suele ser una fuente de datos válidos, mientras que el corpus de referencia extramatemático no, o al menos acostumbra a resultar cuestionable.

Se observa también que P1 no identifica T2 (4) como argumentación arguyendo que "sólo pone en duda (...) y proporciona una vía para estar convencido". Consideramos que reconoce que el valor epistémico de la conclusión es *posible*, por lo que consideramos que para este profesor es más fácil reconocer argumentación cuando se pretende establecer un valor epistémico "fuerte" (claro, evidente, necesario, seguro...).

Salvo en T1 (1), donde hay referencia explícita a la garantía, P1 no se refiere a las garantías en sus explicaciones. Además, las explicaciones de P1 son todas narrativas, cuenta qué sucede en las intervenciones destacando algunas de sus partes.

P1 identifica T1 (4) y T1 (6), en las que se consignan reformulaciones de datos ya establecidos, como argumentaciones. En cambio no identifica ni T1 (3) ni T1 (7), que son reformulaciones de intervenciones anteriores donde no se distinguen claramente elementos que puedan funcionar como datos. Esto nos sugiere que para P1 reformular los datos es una actividad importante dentro de las prácticas argumentativas del aula.

El código *#aportar datos para apoyar la tesis* aparece sistemáticamente en las explicaciones de P1; sin embargo, *#aportar garantías* sólo aparece en T1 (1) donde la referencia a la garantía es explícita. A pesar de ello, consideramos que tanto en su caracterización como en su distinción queda consignada la idea de aportar garantías.

## Análisis del cuestionario de P6

### Análisis de la *caracterización* de P6

- Dar razones fundamentadas de las conclusiones que se extraen, porque se cumplen determinadas condiciones (premisas).
- Dar razones fundamentadas de que no se pueden extraer determinadas conclusiones porque no se cumplen determinadas premisas.
- Dar razones fundamentadas para deducir.
- Formular hipótesis diferentes y ver qué pasa, qué se puede extraer.

- Ofrecer algún ejemplo (contraejemplo) que modifica las premisas y que no permite inferir las mismas conclusiones.

La caracterización de P6 hace hincapié en la idea de “dar razones fundamentadas” para apoyar una tesis; destaca elementos como “conclusiones”, “premisas” y “razones fundamentadas” así como el vínculo entre éstas. Identificamos estos elementos con la *tesis*, los *datos* y las *garantías* del modelo de Toulmin, de modo que vemos esta caracterización como fuertemente basada en aspectos estructurales. Estos elementos, en los términos en que se consignan, no admiten adscripciones a un constructo teórico bien delimitado o a un corpus de referencia que remitan a un contexto definido, aunque las menciones explícitas de “deducción” e “inferencia” sugieren prácticas características del aula de matemáticas de secundaria. Estas menciones sugieren también que P6 asume la existencia de argumentaciones no siempre deductivas a la vez que ubica el razonamiento deductivo en el marco de la argumentación.

El segundo y quinto párrafos destacan las funciones *rebatir* y *establecer condiciones de refutación* de la argumentación. Asociamos el cuarto párrafo con la actividad de explorar y formular hipótesis en el sentido de la resolución de problemas. Es destacable que a partir de la caracterización de P6 podemos inferir acepciones distintas y complementarias de la argumentación en clase de matemáticas: si situamos el cuarto párrafo en el marco de la resolución de problemas, vemos que difiere del resto de las actividades que describe, tanto a nivel cognitivo como procedimental.

**Análisis de la *distinción* de P6**

Sí, en la Tarea 1 las argumentaciones se basan más en ver si se verifican o no unas premisas para poder concluir que las variables son directamente proporcionales. El alumno conoce previamente qué tiene que pasar para extraer la conclusión correspondiente. Mientras que en la Tarea 2, los sentidos nos engañan y hay que comprobar antes de concluir algo. Argumentar que una botella tiene más capacidad que la otra sin comprobarlo es un razonamiento erróneo y te puede llevar a extraer conclusiones erróneas como se ha visto.

Las distinciones de P6 están relacionadas con las actividades que reclaman cada una de las tareas: verificar condiciones de aplicabilidad de una definición a partir de datos iniciales y comprobar a partir de datos numéricos. P6 distingue argumentaciones a partir de las tareas matemáticas en las que intervienen. Su distinción es contextual pues se basa en actividades habituales del aula de matemáticas de secundaria. Este profesor hace referencia al *corpus de referencias matemáticas*, "El alumno conoce previamente qué tiene que pasar para extraer la conclusión correspondiente", y al *corpus de referencia*, "Argumentar que una botella tiene más capacidad que la otra sin comprobarlo es un razonamiento erróneo", ubicando estas referencias dentro de las actividades a realizar. En el segundo caso, la aserción está condicionada por las cláusulas del contrato didáctico que podríamos parafrasear como: "en presencia de datos numéricos se deben realizar operaciones" y "son los datos numéricos y no los visuales los que describen fielmente la situación". P6 hace una valoración sobre la pertinencia del registro semiótico visual, en lo que a aportar datos veraces se refiere, cuando escribe "en la Tarea 2, los sentidos nos engañan y hay que comprobar antes de concluir algo", en línea con el contrato didáctico. Por último, asociamos la explicación de la actividad a realizar en el primer episodio con el razonamiento deductivo ya que P6 sitúa esta actividad entre las prácticas del aula de matemáticas.

**Análisis de las *explicaciones* de P6**

**1.1:** "Cada vez que una variable aumenta 1 la otra aumenta 1.75 …'Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual'. Es una argumentación porque infiere una conclusión: que las dos variables son directamente proporcionales a partir del hecho (premisa) de que al aumentar 1 en una de ellas, la otra aumenta 1.75".

Para la tarea de identificar argumentaciones, P6 no considera cada intervención como unidad de análisis. Sus explicaciones consideran, usualmente, varias intervenciones de un mismo individuo, como se ve en 1.1. En este caso, P6 toma elementos de las intervenciones (1) y (3) y los combina de modo significativo para clarificar su explicación. Consecuentemente, P6 no realiza subrayados; en cambio, cita o parafrasea fragmentos estructurándolos e interpretándolos de modo explicativo. Debido a este modo de actuar, el reconocimiento de sus identificaciones es fuertemente interpretativo por nuestra parte. Realizamos este reconocimiento basándonos en los elementos presentes en sus explicaciones que se corresponden con contenidos e intervenciones específicas. En el ejemplo citado, parece identificar tanto la intervención T1 (1) como la T1 (3) como argumentación, pues los elementos que destaca y la reconfiguración y parafraseo que realiza redundan en elementos y significados presentes en ambas intervenciones, ya sea de manera explícita o implícita. En cambio, en el inciso 1.3 escribe:

"Es como una escalera y todos los peldaños son iguales, por eso es una relación directamente proporcional. Se trata de una argumentación tipo causa-consecuencia: al hacer la gráfica, es una línea recta, y los escalones son todos iguales, de donde se deriva que han de ser directamente proporcionales".

En este caso parafrasea T1 (4) y sin embargo ubica la situación en T1 (6) (después de que se haya producido la gráfica). Ya que la primera intervención aporta la emisión que destaca y la segunda los elementos del foco de su explicación, interpretamos que identifica ambas como una argumentación.

En general, P6 construye sus explicaciones a partir de parafraseos explicativos que consignan el contenido completo de una o más intervenciones o sólo partes significativas de éstas. Las citadas más arriba son ejemplos en este sentido. En muchas ocasiones estas explicaciones constituyen, a su vez, clarificaciones del contenido semántico. Por ejemplo, este profesor explica por qué identifica la intervención T1 (13) como argumentación citando la intervención y diciendo:

**T1 (13)** "Argumentación: como la gráfica no es una línea recta (no se cumple la premisa), se extrae la conclusión de que no puede ser directamente proporcional. El alumno sabe que si se cumple la premisa: gráfica línea recta, se concluye que son directamente proporcionales. Argumento: como no se cumple la premisa, no se puede extraer el resultado que corresponde a dicha premisa."

En esta ocasión P6 incorpora nociones matemáticas (premisa, implicación) y sintetiza lo escrito clarificando el contenido semántico; sugiriendo, incluso, que son nociones conocidas por los alumnos. Además, P6 destaca elementos esquemáticos, en el sentido de Toulmin, en sus explicaciones. Encontramos los siguientes ejemplos:

**T1 (1, 3)** "Es una argumentación porque infiere una conclusión: que las dos variables son directamente proporcionales a partir del hecho (premisa) de que al aumentar 1 en una de ellas, la otra aumenta 1.75".

**T1 (4, 6)** "Se trata de una argumentación tipo causa-consecuencia: al hacer la gráfica, es una línea recta, y los escalones son todos iguales, de donde se deriva que han de ser directamente proporcionales".

**T1 (11)** "Es una argumentación porque formulando la hipótesis de no comprar manzanas, se llega a que se gastarían sólo 2€ (conclusión)".

**T1 (13)** "Argumentación: como la gráfica no es una línea recta (no se cumple la premisa), se extrae la conclusión de que no puede ser directamente proporcional. El alumno sabe que si se cumple la premisa: gráfica línea recta, se concluye que son directamente proporcionales. Argumento: como no se cumple la premisa, no se puede extraer el resultado que corresponde a dicha premisa".

**T2 (8)** "Es una argumentación porque se extrae la conclusión de que el dibujo no está bien hecho, a partir de la comprobación con cálculos de que Y tiene un volumen mayor que X".

En la primera explicación observamos que destaca un dato (al aumentar 1 en una de ellas, la otra aumenta 1.75) y una conclusión (las dos variables son directamente proporcionales) y también destaca el vínculo funcional entre ellos en tanto que inferencia. Omite por completo el valor epistémico de las proposiciones, que quedan caracterizadas y ligadas entre sí por el rol funcional que asumen en el razonamiento. Estas características se repiten en la casi totalidad de sus explicaciones; en particular en las citadas. Por otro lado, omite recurrentemente mencionar las garantías, que suelen quedar implícitas, en sus explicaciones basadas en los roles funcionales de datos y conclusiones que sí explicita. En nuestros ejemplos sólo la cuarta explicación consigna una garantía (El alumno sabe que si se cumple la premisa: gráfica línea recta, se concluye que son directamente proporcionales) y ésta aparece para darle sentido a su explicación y no como una función de la argumentación (establecer garantías). En cambio, queda claro que para P6 establecer una tesis (suele nominarla *conclusión*) y proporcionar datos que permitan justificarla (a lo que suele referirse con las expresiones *inferirla, derivarla, extraerla*) son funciones de la argumentación en este contexto. Las reiteradas menciones a la deducción a partir de usos sinonímicos de estos verbos, así como el habitual foco en los vínculos funcionales de las partes en sus explicaciones, sugieren que P6 asume elementos relacionados con la demostración (en el sentido de Duval, 1999) como características de la argumentación en este contexto. Las explicaciones de P6 están ligadas a aspectos estructurales de las emisiones y vinculadas a cualidades y procesos relativos a la demostración. Son particularmente interesantes sus explicaciones para T1 (11) y (14), respectivamente:

**T1 (11)** "Es una argumentación porque formulando la hipótesis de no comprar manzanas, se llega a que se gastarían sólo 2€ (conclusión)".

**T1 (14)** "Aquí es una argumentación en la medida que "se describe" lo que pasa: si ponemos el (0,2), sí que es una recta, para intentar inducir la conclusión: "es una recta", a partir de la constatación de que pasa por el (0,2)".

P6 considera que ambas intervenciones son argumentaciones a partir de la disposición aparentemente deductiva que él consigna. Resulta interesante notar esto ya que hemos considerado que estas intervenciones no son argumentaciones (ver documento de control en el Anexo 2).

P6 elabora sus explicaciones de modo narrativo: "cuenta" qué es lo que sucede en el episodio a partir de la distinción de aspectos estructurales de las intervenciones que acomoda sugiriendo vínculos funcionales. Los parafraseos de estos fragmentos, con los que usualmente clarifica el contenido semántico, le sirven para destacar su función en el esquema funcional. Veamos sus explicaciones para T1 (6) y T2 (8):

> **T1 (6)** "Se trata de una argumentación tipo causa-consecuencia: al hacer la gráfica, es una línea recta, y los escalones son todos iguales, de donde se deriva que han de ser directamente proporcionales".
> **T2 (8)** "Es una argumentación porque se extrae la conclusión de que el dibujo no está bien hecho, a partir de la comprobación con cálculos de que Y tiene un volumen mayor que X".

## Análisis del cuestionario de P8

### Análisis de la *caracterización* de P8

> Hacer afirmaciones que se basan en argumentos. Éstos pueden ser de diferentes niveles de reflexión y de validez. Por niveles de reflexión me refiero a lo que ha aparecido antes. Por validez me refiero a una idea, que creo es de J Mason, según a quién convence el argumento. Si sólo le convence a quien lo hace es flojo y se tendrá que mejorar, si además convence a sus amigos y quienes confían en él ya está mejor pero se tendrá que mejorar. En cambio si convence a todos, incluido el profesor/a, será válido. En la clase de matemática los alumnos aprenden argumentar, siguiendo un proceso que puede empezar convenciendo solamente a quien lo hace pero ha de acabar convenciendo a todos.

El foco de la caracterización de este profesor reside en "hacer afirmaciones que se basan en argumentos". La primera complicación para interpretar las palabras de P8 es que caracteriza *argumentación* utilizando la palabra *argumento*, de modo que resulta una definición cíclica; aunque después arroja luz sobre qué es un argumento escribiendo que éstos manifiestan distintos niveles de validez y reflexión. La validez, como la describe, queda asociada a la pertinencia y a la fuerza del argumento y por lo tanto recae en su valor epistémico. Aunque no es claro a qué se refiere con "niveles de reflexión", entendemos que la noción está vinculada a los contenidos involucrados en los argumentos y a su estatus epistemológico, siendo los matemáticos o con un valor epistémico más positivo los más "reflexivos". Su caracterización es bastante general, aunque resulta significativo que sugiera que en clase de matemáticas la argumentación reviste ciertas particularidades (que quedan implícitamente vinculadas a sus explicaciones) y que es objeto de enseñanza-aprendizaje: "en la clase de matemática los alumnos aprenden argumentar, siguiendo un proceso que puede empezar convenciendo solamente a quien lo hace pero ha de acabar convenciendo a todos". Para P8 la argumentación tiene la intención de #*convencer a otros* y #*convencer a uno mismo* y describe esto como un proceso que "incrementa" (en el sentido de tornar positivo) el valor epistémico de la proposición que se defiende: "ha de acabar convenciendo a todos". Considera tres "niveles" cuando habla de convencer: uno mismo; los amigos y quienes confían en uno y todos los demás. Sugerimos que esto se relaciona con el corpus de referencia, mientras “más compartidas” sean las referencias implicadas más simple será la tarea de establecer un valor epistémico positivo para una cierta tesis que se pretende apoyar. En todo caso, esta idea distancia la interpretación de P8 de la demostración, sugiriendo que no son sólo razonamientos deductivos dentro de una teoría dada los constituyen las prácticas argumentativas del aula de matemáticas de secundaria.

**Análisis de la *distinción* de P8**

> En el episodio 1 las argumentaciones se basan en el reconocimiento de unas relaciones que ha de saber. Ha de tener claro el concepto de proporcionalidad directa.
> En 4C también ha de saber el concepto pero muestra que esta relación la asocia con la representación gráfica de la escalera.
> Al final se basan en la observación del gráfico de la función que ha de pasar por (0,0). Puede que este alumno no sepa nada sobre el significado de la proporcionalidad directa, simplemente recuerda una imagen que asocia con la idea de la proporcionalidad directa. Éstas son dos tipos de argumentaciones diferentes. Es decir los argumentos primeros son más sólidos que los que se dan en el párrafo anterior [*sic*]. 15B.
> En el segundo cuestionario las argumentaciones basadas en la simple observación del gráfico son poco sostenibles, son flojas, mientras que la argumentación que se basa en los cálculos son [*sic*] más convincentes.
> Cuando E reconoce que es más ancha muestra un nivel de argumentación más reflexiva haciéndose un [*sic*] representación de la situación no basada únicamente en el gráfico sino interpretando la información que en él aparece.

Cuando P8 dice que "las argumentaciones se basan en el reconocimiento de unas relaciones que ha de saber", consideramos que se refiere al corpus de referencia matemático. Utiliza esta idea en oposición a "la representación gráfica de la escalera" (que asociamos con el corpus de referencia extramatemático) para describir dos niveles de "solidez" en la argumentación. Sugerimos que P8 distingue entre los dos corpus y asocia estatus diferentes a cada uno de ellos dentro del aula de matemáticas..La distinción que destaca P8 entre argumentaciones es, a grandes rasgos, de orden epistemológico: por un lado, adscripción a un corpus de referencias disciplinar y, por otro, el valor epistémico de las proposiciones en relación con los interlocutores. Los argumentos se distinguen, entonces, por su fuerza, que está a su vez en función del corpus de referencia al que se adscriben.

**Análisis de la *reflexión* de P8**

Al principio sí para clarificar la idea de lo que es una argumentación.

P8 manifiesta que el termino *argumentación* reviste cierta complejidad, pero no da detalles acerca de las variables que condicionan dicha complejidad.

**Análisis de las *explicaciones* de P8**

**T1 (1) "**Es una argumentación porque reconoce una relación entre variables, la identifica con un concepto que conoce y de ello hace una deducción aunque sea incorrecta".

**T1 (3) "**Es una insistencia sobre el argumento sobre el que se basa para reconocer la proporcionalidad directa".

**T1 (7) "**A partir de lo que aporta C [se refiere a (6)] hace su afirmación".

**T2 (1) "**Hace una afirmación basándose en una observación visual".

Aunque su caracterización remarque la función argumentativa *#convencer a otros*, las explicaciones de P8 no suelen destacar esta función sino describir lo que sucede resaltando, generalmente, aspectos funcionales entre los elementos de la intervención. Es posible que para P8 la intención de convencer a otros sea algo descontado en relación con el discurso argumentativo. Considera cada intervención como unidad de análisis. Sus explicaciones son fuertemente estructurales (en el sentido de Toulmin); suele narrar lo que sucede estableciendo vínculos funcionales entre partes que distingue, explícita o implícitamente, por su rol en la argumentación. Además, enfatiza las funciones argumentativas *#aportar datos para apoyar una tesis* y *#aportar garantías*. Considera la *#continuidad en el discurso*. P8 reconoce sistemáticamente aportaciones de intervenciones previas como antecedentes en las intervenciones que reconoce como argumentación.

**T1 (3)** "Es una insistencia sobre el argumento sobre el que se basa para reconocer la proporcionalidad directa".

**T1 (7)** "A partir de lo que aporta C [se refiere a (6)] hace su afirmación".

**T1 (15)** "Por la misma razón [se refiere a (13)]. Niega que haya relación de proporcionalidad directa en base a sus conocimientos".

Es interesante que identifique T1 (7) destacando lo aportado en T1 (6) y que no identifique esta última intervención, cuando la obvia, posible conclusión implícita de T1 (6) es la que se explicita en T1 (7). El motivo para no identificar la primera de las dos intervenciones puede ser, justamente, que la conclusión no se hace explícita, ya que en sus explicaciones suele destacar la tesis como uno de los elementos implicados. Por otro lado, P8 identifica T1 (1, 3, 4, 7) como argumentaciones. Sus explicaciones para T1 (3, 7) describen explícitamente estas intervenciones como reformulaciones:

**T1 (3)** "Es una insistencia sobre el argumento sobre el que se basa para reconocer la proporcionalidad directa".

**T1 (7)** "A partir de lo que aporta C [se refiere a (6)] hace su afirmación.

Por lo que consideramos que para P8 reformular es una actividad argumentativa en este contexto. Se refiere usualmente a datos o garantías haciendo hincapié en los contenidos matemáticos implicados; lo que asociamos con el estatus que otorga al corpus de referencia matemático y que queda reflejado en su *distinción*. Para P8 la solidez de los argumentos está supeditada a la adscripción a un determinado cuerpo de conocimientos disciplinares.

## *6.2 Discursos hacia perfiles individuales*

Tal como se habrá advertido desde el inicio, al leer con atención nuestro marco teórico de referencia, este trabajo se sitúa en un marco fuertemente discursivo. De acuerdo con ello, la construcción de perfiles individuales es en realidad una tarea discursiva de construcción de discursos sobre lo más significativo que ha emergido tras nuestro análisis para cada uno de los cuestionarios individuales. Dicho de otro modo: el perfil de un profesor es nuestro discurso sobre su perfil. Ésta es una primera observación. Antes de pasar a describir los distintos perfiles, queremos hacer una segunda observación: no es posible leer significativamente los discursos de los perfiles sin haber antes seguido el análisis que lleva hasta su construcción. No se trata de perfiles entendidos como productos finales que dan respuesta al primero de los objetivos científicos de nuestra investigación, sino de "perfiles-en-contexto", es decir, perfiles en el contexto de una de las fases del análisis.

### Pérfil del profesor P1

P1 caracteriza la argumentación en el aula de matemáticas a partir de una finalidad: convencer a otros acerca de la veracidad o falsedad de una proposición. Los elementos a aportar se organizan en torno a esta finalidad. De modo que P1 concibe la argumentación como actividad colectiva cuyo elemento central es el establecimiento de un valor epistémico "fuerte" para una proposición-objetivo. Entre los elementos que destaca como posibles aportes para conseguir este fin, P1 considera tanto algunos adscribibles al corpus de referencia matemático como otros ajenos a éste, sugiriendo que metáforas y comparaciones son válidas. Distingue entre argumentaciones en función de aspectos epistemológicos de los datos y garantías involucrados.

Para elaborar sus explicaciones, P1 produce narraciones sobre los episodios, destacando elementos de las intervenciones, a menudo los que podrían funcionar como datos, sin proporcionar pautas generales reconocibles. De modo que no es posible inferir, con base en sus respuestas, interpretaciones generales acerca de la argumentación o acerca de la naturaleza, condición, uso, rol, etc. de sus elementos.

A pesar de basar su caracterización en la función argumentativa *convencer a otros*, esta función desaparece de sus explicaciones positivas, donde parece considerar más explicativo narrar lo sucedido destacando los elementos aportados en favor de la tesis.

Posiblemente considere esta finalidad un elemento obvio, del que sólo debe destacarse su eventual ausencia, como lo hace en alguna explicación negativa.

P1 considera que los elementos (datos, garantías, etc.) de emisiones precedentes conforman y otorgan coherencia a las intervenciones posteriores. Considera también que la reformulación de estos elementos es una actividad importante dentro de las prácticas argumentativas del aula de matemáticas de secundaria.

## Pérfil del profesor P2

Al caracterizar explícitamente la argumentación en el aula de matemáticas, P2 restringe los datos admisibles a los adscribibles a una "teoría" y verdaderos dentro de ésta. Consideramos que esto es una referencia al corpus de referencia matemático reconocible para esta etapa educativa. La adscripción de los datos a una teoría, así como la aserción acerca del valor lógico y, por consiguiente, del valor epistémico establecido a priori dentro de ésta, sugieren que para este profesor la argumentación, en este contexto, está muy ligada a la demostración. Para P2 argumentar en el aula implica "defender" una tesis apoyándose en este tipo de datos, por lo que la presenta como una actividad colectiva, y considera que la reformulación de estos datos es una actividad fundamental dentro de las prácticas argumentativas del aula.

Sus explicaciones son sobre todo narrativas; "cuenta" qué sucede recurriendo a aspectos semánticos de las intervenciones, destaca elementos significativos, parafrasea lo escrito y hace interpretaciones que clarifican/amplían contenidos semánticos. Sin embargo, sus explicaciones no consignan criterios generales discernibles que justifiquen sus identificaciones y, en ocasiones, consigna reflexiones aisladas que no dan cuenta de la tarea solicitada en el cuestionario; reflejo de la complejidad intrínseca asociada a explicar si un discurso *es* argumentación.

## Pérfil del profesor P3

Las consideraciones de P3 son contextuales, caracterizando la argumentación, explícitamente, dentro del marco de la resolución de problemas. Para este profesor argumentar en el aula de matemáticas persigue "llegar a una conclusión" para resolver un problema y convencer a los demás y a uno mismo de lo apropiado del razonamiento. La argumentación es, por tanto, una actividad colectiva y participativa.

Las explicaciones de P3 son narrativas, describe lo que sucede en las intervenciones destacando las funciones argumentativas que lo llevan a identificar argumentación. Estas funciones son, fundamentalmente, convencer a otros y a uno mismo, establecer una tesis y aportar datos para apoyarla. Este profesor identifica argumentaciones cuando detecta en los episodios los elementos que sugieren estas funciones. Considera que las argumentaciones se pueden distinguir a partir del origen de los datos y, en general, de lo elementos implicados: las referencias matemáticas y extramatemáticas constituyen constructos separables y separados, discernibles en el marco de las prácticas argumentativas del aula. P3 distingue con mayor frecuencia intervenciones donde intervienen elementos asociables con contenidos matemáticos.

Para P3 los contenidos de las emisiones precedentes determinan la interpretación de cada nueva emisión y las reformulaciones de los datos constituyen parte de las prácticas argumentativas del aula en la medida en que pretendan convencer al otro.

## Pérfil del profesor P4

A la solicitud de caracterizar explícitamente la argumentación en el aula de matemáticas, P4 responde de manera vaga, compartiendo que le “cuesta distinguir entre razonamiento, demostración, deducción y argumentación”. Asocia la argumentación con la resolución de problemas y la demostración formal, justificando esta asociación a través de su formación y sugiriendo que sus interpretaciones están condicionadas por ésta. Para él, la argumentación en el aula de matemáticas debe acercarse a los esquemas de la demostración formal o, al menos, tenerlos como ideal.

Este profesor escribe que una argumentación debe tener "ciertas partes" reconocibles y es en virtud de la evidencia de estas partes que el discurso se reconoce como argumentativo. Para llevar a cabo la tarea de identificar argumentaciones, la estrategia de P4 pasa por buscar elementos estructurales que aparenten ajustarse a un esquema deductivo y/o causal en las intervenciones.

En sus explicaciones P4 destaca sistemáticamente los datos, o los elementos que como tales parecen funcionar, y su función dentro de la intervención, estableciendo vínculos funcionales con las conclusiones que considera. Su prioridad para identificar argumentaciones recae en el establecimiento de estos vínculos funcionales, que se acercan a esquemas deductivos. En diversas ocasiones, aunque establece relaciones entre partes estructurales de las intervenciones, sus respuestas no son coherentes con el requerimiento de explicación, limitándose a narrar lo que sucede sin evidenciar de modo inteligible una respuesta a la demanda. Esto, aunado al uso esporádico del verbo *argumentar* y sus derivados de manera cíclica para explicar por qué un discurso es argumentativo, evidencia la dificultad de la tarea solicitada.

P4 reconoce la necesidad de procesos de fundación semántica del contenido como componentes de la argumentación, destacándolos como elementos de algunas argumentaciones que identifica. Aunque a partir de su caracterización la demostración formal constituye un ideal de argumentación, P4 señala procesos y prácticas distintas como parte de las prácticas argumentativas, incluyendo la reformulación de datos.

## Pérfil del profesor P5

Su caracterización explícita es algo ambigua, pero queda claro que para P5 la argumentación en el aula de matemáticas es una actividad compleja que requiere e implica "diferentes recursos". Para este profesor, argumentar en el aula es una práctica colectiva y es a partir de la interacción, y de la necesidad comunicativa, que estos recursos se despliegan a fin de llegar a un conocimiento compartido. Sus interpretaciones aproximan la argumentación en el aula a los ideales de formalismo de la demostración (aunque no la limitan a éstos), haciendo hincapié en el valor lógico y operacional de las proposiciones, otorgados por la adecuación a una teoría, en el razonamiento deductivo y en la necesidad (o conveniencia) de evidenciar la estructura para identificar argumentaciones. A pesar de ello, sus explicaciones raramente se fundan en evidenciar consistentemente la estructura, más bien lo hacen en destacar los elementos que podrían funcionar como datos en las intervenciones y su función de apoyo a la tesis sostenida. Narra lo que sucede en las intervenciones poniendo de relieve las funciones argumentativas implicadas y destacando los datos involucrados.

Distanciándose del formalismo de la demostración, P5 reconoce la necesidad de fundación semántica y su adscripción a las prácticas argumentativas del aula. Para este profesor, proporcionar un "ejemplo cotidiano" (una metáfora/analogía, en este caso) a fin de ilustrar contenidos matemáticos es una actividad que pertenece a las prácticas argumentativas del aula.

Parece claro que para P5 la reformulación es parte de la actividad argumentativa del aula y que las intervenciones precedentes constituyen los antecedentes que conforman el significado de las emisiones, siendo la coherencia entre éstas un rasgo importante que considera. Destaca la coherencia entre las intervenciones de un individuo como rasgo de la argumentación, e indica la necesidad de solapamiento entre los campos semánticos implicados para elaborar un discurso argumentativo.

## Pérfil del profesor P6

P6 caracteriza explícitamente la actividad argumentativa haciendo hincapié en la idea de "dar razones fundamentadas" y en aspectos estructurales del discurso. Las primeras proveen los vínculos funcionales que articulan las segundas y es entonces que se puede hablar de argumentación en el aula de matemáticas. Consecuentemente, su estrategia para identificar y explicar argumentaciones consiste en elaborar, narrativamente, parafraseos explicativos que destacan los elementos estructurales que identifica, aclarando/ampliando, usualmente, el contenido semántico del discurso de modo de otorgar coherencia cognitiva a la argumentación que identifica y obviando, usualmente, los aspectos relacionados con la "negociación" del valor epistémico de las proposiciones involucradas: es en la articulación funcional de las partes estructurales que la argumentación se revela. De modo que las funciones argumentativas que más habitualmente destaca son las de establecer una tesis y aportar datos para apoyarla. Sus interpretaciones acerca de la argumentación, entonces, aproximan ésta a procesos que asociamos con la demostración.

Considera que una argumentación puede conformarse a partir de diversas intervenciones de un individuo, a lo largo de las cuales los elementos estructurales se agregan para formar un discurso que se articula interpretando los contenidos expuestos y sus relaciones funcionales. Distingue entre argumentaciones a partir de cuestiones epistemológicas: conformidad al interno de una teoría, por un lado, y aplicación de un modelo matemático al mundo, por el otro.

Sus explicaciones son narrativas y se basan en parafraseos explicativos que destacan elementos significativos de las intervenciones aclarando o ampliando los contenidos semánticos implicados sin considerar, generalmente, la modificación del valor semántico de las tesis sostenidas.

## Pérfil del profesor P7

P7 considera la argumentación como una actividad colectiva, dirigida a otros cuyo objetivo es "reforzar lo que se afirma". Sin embargo, resulta difícil interpretar sus respuestas pues, en general, son bastante escuetas e incluso, en ocasiones, no dan cuenta de la tarea de explicar por qué las intervenciones que identifica son argumentaciones. Se limita a narrar brevemente lo que sucede en las intervenciones destacando algún aspecto que considera significativo y formula un párrafo genérico en el que refiere que todas estas intervenciones pretenden “defender el punto de vista sostenido” y “convencer a los demás dando alguna razón que refuerce su idea”, proponiendo éstas como las funciones primordiales de la argumentación.

P7 sugiere la identificación sistemática de aspectos estructurales así como de “palabras indicativas” (que no logramos identificar) para enfrentar la tarea de identificar argumentaciones. Suele no identificar las intervenciones en las que los elementos estructurales están implícitos; aunque reconoce los elementos de intervenciones anteriores como antecedentes que dan sentido a una emisión. Reconoce también la reformulación de los elementos aportados como una actividad componente de las prácticas argumentativas del aula. Para P7 argumentar en el aula de matemáticas e identificar argumentaciones son actividades complejas que implican recursos variados.

### Pérfil del profesor P8

P8 asume la argumentación como objeto de enseñanza-aprendizaje en el aula de matemáticas de secundaria. Describe el proceso de argumentar en el aula como el incremento positivo y gradual del valor epistémico de las proposiciones a través de elementos de apoyo: la finalidad de la argumentación es “acabar convenciendo a todos”. Los “apoyos” pueden ser “más o menos válidos”, lo que P8 asocia a la pertinencia y fuerza de los argumentos y, por tanto, a su valor epistémico compartido, así como a la pertenencia al corpus de referencia matemático propio de la etapa. Los argumentos basados en nociones y conocimientos matemáticos se ven más fuertes.

El profesor propone distinciones entre argumentaciones de orden, a grandes rasgos, epistemológico: por un lado por su adscripción a un corpus de referencia disciplinar y por otro a través del valor epistémico de las proposiciones en relación con los interlocutores. Los argumentos se distinguen, entonces, por su fuerza y ésta se encuentra en función del corpus de referencia al que se adscriben.

Las explicaciones se basan en los elementos estructurales de las intervenciones. P8 suele narrar lo que sucede estableciendo vínculos funcionales entre partes que distingue, explícita o implícitamente, por su rol en la argumentación que identifica.

Para P8 aportar datos y garantías para apoyar la tesis son funciones distinguibles de la argumentación. Se toman sistemáticamente elementos de intervenciones previas como antecedentes de emisiones posteriores que determinan significados. Así, la reformulación forma parte de las prácticas argumentativas del aula.

## Pérfil del profesor P9

P9 caracteriza la argumentación como la “aportación de razones para sostener o contradecir una idea” y la sitúa entre la explicación y la demostración, en un continuo que va de una a otra. Ubicar una argumentación en este continuo, pasa por hacer una “valoración” en función de la etapa escolar y el “nivel de conocimiento de los alumnos”. Esta valoración implica distintos “niveles” asociables con la argumentación que la acerca a la demostración, en el caso de razonamientos deductivos, o bien a la explicación, en cuyo caso han de considerarse la fuerza, pertinencia y “progresividad” de los argumentos. Esta última noción se refiere a la apropiación parcial de conocimientos y datos generados en el proceso y reciclaje de conclusiones parciales útiles para la justificación de la *frase objetivo*. La argumentación deductiva no está sujeta a este “análisis” que propone para otros tipos de argumentación, pues posee, per se, estas características: es coherente con el objetivo a alcanzar, es relevante, progresiva, general y hace uso de una “lógica matemática”. Así, la argumentación deductiva es el ideal de la actividad argumentativa en el aula. Para P9 el conocimiento matemático se acumula a lo largo de la escolarización y se espera que se manifieste en las argumentaciones en el contexto del aula. De ahí, se distinguen argumentaciones en función de los contenidos matemáticos implicados: correctos o incorrectos; es decir, verdaderos dentro de la teoría o falsos. Aunque el valor epistémico de estas “concepciones matemáticas” puede no estar determinado a priori (como en una demostración), sino en construcción.

P9 recalca una idea que condiciona la lectura de sus respuestas: el discurso de otros está siempre mediado por la interpretación y habrá elementos implícitos que deben ser considerados. En línea con esto, procede de modo peculiar para identificar argumentaciones: no considera las intervenciones o un subconjunto particular como unidades de análisis, en cambio considera el conjunto de todas las intervenciones de un individuo y lo analiza. No busca elementos que, agregados, conformen una argumentación de la que se puedan individualizar sus partes, en cambio, considera las funciones argumentativas que quedan satisfechas a partir del conjunto de intervenciones destacando elementos (tesis, garantía, dato) para evidenciar este hecho, sin que éstos sean el fundamento de sus explicaciones. Este procedimiento resulta único entre los participantes y sugiere que para P9 la unidad de análisis pertinente en este caso es el discurso individual. Constituye un caso peculiar en relación con nuestra noción de *continuidad en el discurso*, pues no sólo considera elementos de intervenciones previas como antecedentes, sino que considera el conjunto de las intervenciones como unidad de análisis y, por lo tanto, todos los elementos presentes en las intervenciones a la vez. Decide si el discurso de un participante es argumentativo y organiza los elementos de sus intervenciones en función de esto, destacando funciones argumentativas y elementos estructurales, pero haciendo hincapié en los contenidos involucrados y su pertinencia en función del nivel académico de los participantes y del problema matemático en cuestión.

Resulta complicado determinar los criterios de P9 para identificar argumentaciones. Sus explicaciones son narrativas e introducen una fuerte componente interpretativa, haciendo consideraciones, generalmente epistemológicas, acerca de lo que se dice en las intervenciones. P9 “cuenta” lo que sucede en los episodios enfatizando los contenidos disciplinares, para lo cual recurre a *parafraseos explicativos* en sus explicaciones. Sus explicaciones no responden "satisfactoriamente" a la tarea de explicar por qué son argumentaciones. P9 suele utilizar el verbo argumentar y sus derivaciones en sus explicaciones, recurriendo a una definición cíclica.

Reconoce la necesidad de fundación semántica de los argumentos y suele proveer aclaraciones de los contenidos semánticos en sus explicaciones, así como de los contenidos matemáticos, relacionándolos con los esperados entre alumnos de esta etapa. Para P9 las reformulaciones son parte de la actividad argumentativa; considera que éstas pueden conformar un “progreso” en la argumentación, aunque no podemos determinar si reformular es una actividad argumentativa per se o sólo cuando se encuentra dentro de un “tipo de discurso” que resulta argumentativo.

## Pérfil del profesor P10

Para P10 argumentar tiene la intencionalidad de convencer a otros. De modo que la modificación del valor epistémico de la tesis constituye el núcleo de su cuestionario. P10 propone distinguir las argumentaciones en función de las funciones argumentativas que pretenden satisfacer: apoyar la tesis, convencer a otros, rebatir y establecer condiciones de refutación.

Las explicaciones de P10 son singulares, pues apela a aspectos estructurales generales de las intervenciones, a sus funciones argumentativas y al objetivo general de convencer al otro, sin hacer uso de contenidos temáticos ni de narraciones que aclaren lo sucedido en los episodios desde el punto de vista semántico. Es el único profesor que procede de este modo. Sus explicaciones para distintas intervenciones suelen ser idénticas cuando considera que se estructuran alrededor de los mismos aspectos generales. La continuidad en el discurso no se da, en sus explicaciones, a través del reconocimiento del "reciclaje" de elementos de proposiciones anteriores, sino a través de la unicidad de la intención que articula las intervenciones. Desde su perspectiva, las reformulaciones son parte de las prácticas argumentativas siempre que el discurso tenga esta intención. En sintonía con lo dicho, sus explicaciones se basan, fundamentalmente, en el aporte de datos para apoyar la tesis sostenida y la intención deliberada de convencer a otros. Utiliza nociones generales que incluyen elementos estructurales sin apelar a la narración de lo sucedido en los episodios. Reconoce la necesidad de buscar argumentos semánticamente fundados así como de argumentaciones no deductivas como parte de la actividad argumentativa del aula.

## *6.3 Discursos hacia temas emergentes*

Para la concreción del primer objetivo de la investigación, hemos elaborado discursos orientados a la delimitación de perfiles para el profesorado. Esto tiene que ver con aproximar cuáles son las interpretaciones sobre argumentación en el aula de matemáticas de secundaria que los distintos profesores construyen por separado. Ahora, para la consecución del segundo objetivo de la investigación, elaboramos discursos orientados a la delimitación de temas emergentes para el conjunto del profesorado colaborador. Esto tiene que ver com aproximar cuáles son algunas de las interpretaciones comunes sobre argumentación en el aula de matemáticas de secundaria que se desprenden del análisis de los cuestionarios individuales y de los discursos previamente elaborados sobre perfiles. De este modo, cerramos la trayectoria que va de la identificación de rasgos individuales a la de rasgos comunes.

### Tema 1. Ampliación/clarificación del campo semántico en la práctica argumentativa del aula de matemáticas

En el documento de control de características de los episodios, establecemos que las intervenciones T1 (1), (3), (4), (6) y (7) son equivalentes, es decir, los datos, garantías y tesis (o elementos que podrían funcionar como tales) que las constituyen, implícita o explícitamente, son equivalentes y están presentes ya en la primera intervención. Los datos esgrimidos en las intervenciones posteriores no amplifican los contenidos matemáticos y simplemente son reformulaciones a partir de parafraseos, analogías y/o cambios de registro de representación. La garantía utilizada en las cinco intervenciones es la definición (no explícita y errónea) de *directamente proporcional* y todas recogen una única tesis.

Dicho lo anterior, dos aspectos llaman la atención durante la lectura y codificado de los cuestionarios. Por una parte, los diez profesores identifican varias intervenciones como argumentaciones y, por otra, en sus explicaciones destacan vínculos con intervenciones anteriores. Por ello, se creó y aplicó un código particular para el primer hecho: *#CE REPETICIÓN*, cuya definición fue: La intervención es equivalente a una anterior (desde la perspectiva del documento de control), no aporta nuevos datos ni refuerza la garantía y sin embargo el profesor la considera una argumentación. Para el segundo, se creó y aplicó el código: *#CE CONTINUIDAD EN EL DISCURSO*, definido como: El profesor considera elementos de intervenciones anteriores (del mismo emisor o no) como elementos/antecedentes de la argumentación.

Tras analizar esta situación encontramos, en las explicaciones de los profesores, justificaciones para la identificación de argumentaciones basadas en elementos como *reiteraciones, parafraseos, analogías y cambios de registro*. La naturaleza lingüística de los elementos identificados llevó a modificar el nombre del primer código en favor de uno más representativo: *#CE REFORMULACIÓN*; manteniendo su definición. Siendo ambos códigos (*#CE REFORMULACIÓN* y *#CE CONTINUIDAD EN EL DISCURSO*) de mayor alcance, su uso no se restringe a las intervenciones citadas más arriba.

Apoyándonos en Atlas.ti para la inspección sistemática de relaciones entre códigos y las intervenciones, se evidenció que casi siempre que aparece *#CE REFORMULACIÓN* aparece también *#CONTINUIDAD EN EL DISCURSO*. Es decir, cuando los profesores identifican como argumentación una intervención que es equivalente (en el sentido expuesto) a una o varias anteriores, destacan elementos de estas intervenciones en sus justificaciones, explícita o implícitamente. La intervención identificada se vincula a otras precedentes por medio de los elementos (generalmente estructurales, en el sentido de Toulmin) destacados.

Un párrafo aparte merece P2, cuyo cuestionario no presenta esta relación entre códigos. Este profesor procede de modo peculiar al identificar T1 (3, 4, 6, 7) como argumentaciones: destaca elementos que son comunes en sus explicaciones y sin embargo las estructura de manera autónoma, es decir, no establece un vínculo claro, explícito o implícito, que ligue los contenidos de las intervenciones. Éstas quedan relacionadas sólo por el hecho de contar con elementos estructurales comunes sin que esto refleje, en las explicaciones de P2, un vínculo discursivo entre intervenciones. Esto refleja la importancia que P2 da a la identificación de elementos estructurales dentro de las intervenciones y no niega la relación que pretendemos establecer.

Algunos ejemplos representativos de explicaciones para las identificaciones de las intervenciones (3), (4), (6) y (7) de la Tarea 1 son los siguientes[8]:

> **P4 sobre T1 (3):** "Precisa la argumentación anterior, ahora sin valores numéricos, para afirmar que lo que importa es que sea directamente proporcional [*sic*]".

[8] En los anexos 5-9 (tablas Turno 1, Turno 3, Turno 4, Turno 6 y Turno 7) hay una presentación sintética.

**P6 sobre T1 (3):** "Es una argumentación porque infiere una conclusión: que las dos variables son directamente proporcionales a partir del hecho (premisa) de que al aumentar 1 en una de ellas, la otra aumenta 1.75". [La misma explicación que usa para identificar T1 (1)]

**P8 sobre T1 (3):** "Es una insistencia sobre el argumento sobre el que se basa para reconocer la proporcionalidad directa".

P4 destaca el vínculo entre los elementos que funcionan como datos en esta intervención y los de la primera, considerando que de este modo el alumno A "precisa" su argumentación precedente. P6 elabora una única explicación para su identificación de T1 (1) y (3) destacando elementos estructurales de las argumentaciones (datos y tesis). P8 identifica esta intervención como argumentación y lo explica diciendo que es "una insistencia" sobre el "argumento" utilizado en T1 (1).

**P5 sobre T1 (4):** "Utiliza (1) con un ejemplo cotidiano para mostrar que ambas cantidades aumentan con la misma proporción.

En (4) y (6) hay argumentación porque muestra los ejemplos para respaldar su idea de D.P. (aunque no observa otra condición necesaria, que es que pase la gráfica por el (0,0))".

**P4 sobre T1 (4):** "Para C, este es el argumento para afirmar que es una relación directamente proporcional".

**P1 sobre T1 (4):** "Afirma que es una relación directamente proporcional y añade a (3) una comparación para que sea más fácil de imaginar".

P5 relaciona explícitamente las intervenciones T1 (1) y (4) alegando que C "utiliza" la intervención (1) dando "un ejemplo cotidiano". Justifica su identificación aduciendo que el alumno "muestra ejemplos" para respaldar la tesis (ya establecida en la primera intervención). P4 destaca el dato de la intervención y lo asocia con la tesis común. P1 nota que reitera la tesis y añade "una comparación" (que funciona como dato) a la intervención anterior.

**P1 sobre T1 (6):** "Se fija en la tabla y en el gráfico para dar validez a su afirmación".

**P6 sobre T1 (4-6):** "Se trata de una argumentación tipo causa-consecuencia: al hacer la gráfica, es una línea recta, y los escalones son todos iguales, de donde se deriva que han de ser directamente proporcionales".

**P7 sobre T1 (6):** "En (6), C relaciona la gráfica comentada con su comparación en (4).

Todas estas intervenciones van dirigidas a defender el punto de vista sostenido por cada alumno/a. Cada uno/a intenta convencer a los demás dando alguna razón que refuerce su idea".

P1 señala el cambio de registro de los datos y lo vincula a la tesis. P6 vincula la analogía de T1 (4) con el cambio de registro de representación de modo complementario (mediante conjunción) y destaca datos para justificar la tesis a través del vínculo funcional. P7 establece una relación entre los datos presentados a través de la analogía en T1 (4) y a través del cambio de registro de representación en T1 (6)

> **P5 sobre T1 (7): “**(…) En el tercero [se refiere a esta intervención], coge la idea anterior para respaldar su teoría.
> Todas sus intervenciones son para respaldar su idea de “directamente proporcional” y son coherentes”.
> **P7 sobre T1 (7):** “En (7), A recoge la idea expresada por C en (6) como argumento de lo que ha defendido en (3).
> Todas estas intervenciones van dirigidas a defender el punto de vista sostenido por cada alumno/a. Cada uno/a intenta convencer a los demás dando alguna razón que refuerce su idea”.

Tanto P5 como P7 remarcan que en esta intervención el alumno suscribe lo dicho en la intervención precedente por su compañero. Por otro lado, P3 y P10 utilizan estrategias “distintas”: en un único párrafo explican por qué identifican todas las intervenciones de A (1, 3, 7) como argumentaciones.

> **P3:** “Son argumentaciones porque quiere convencer a los demás y a sí mismo de que la situación planteada corresponde a la definición que los tres conocen para proporcionalidad directa”.
> **P10:** “Yo creo que son argumentaciones porque parte de una proposición que considera cierta y formula una serie de “razones” (argumentos) a favor de ésta, con la intención de modificar el pensamiento de su compañero, de persuadirlo, de influenciarlo a través de sus argumentos para que admita como válida la proposición”.

En este caso, ambos profesores se centran en la idea de *convencer* y consideran una tesis común a las tres intervenciones que se pretende hacer “corresponder con una definición” (P3) o a favor de la cual se ofrecen “razones” (P10).

Un caso aparte, en el sentido de su estrategia para explicar sus identificaciones, lo constituye P9. Lo tratamos en el análisis de su cuestionario y lo marginamos en este momento por no adaptarse al esquema que estamos siguiendo, sin que esto cuestione nuestro análisis o constituya un caso a modo de contraejemplo.

Todas estas explicaciones, si se analizan respecto a la estructura que distinguen explícita o implícitamente (en el sentido de Toulmin), presentan elementos comunes ya consignados en la primera intervención (estos elementos están destacados en las tablas Turno 1, Turno 3, Turno 4, Turno 6 y Turno 7 en los anexos correspondientes). La tesis y la garantía que se reconocen en las explicaciones de los profesores son siempre las mismas y los datos destacados son parafraseos, analogías o cambios de registro de representación de los datos de la primera intervención. Desde nuestro punto de vista el contenido matemático que pretenden expresar es equivalente.

Por lo tanto, a partir del análisis de las explicaciones de los profesores, concluimos que lo que distingue estas intervenciones es la presentación que se hace en ellas de los datos ya esgrimidos en la primera intervención a través de reformulaciones de los mismos y la incorporación de estas reformulaciones en el discurso. Estas reformulaciones de datos y su incorporación al discurso reconfiguran, o pueden reconfigurar, el campo semántico de los conceptos involucrados; ya sea por incorporación de rasgos semánticos comunes (ampliación del campo semántico) o por incorporación de rasgos semánticos distintivos (clarificación del campo semántico).

Si entendemos las paráfrasis, analogías y cambios de registro de representación como clarificaciones/ampliaciones (de facto o potenciales) del campo semántico de los datos involucrados, podemos suponer, considerando que los otros elementos no varían, que estas clarificaciones/ampliaciones motivan la identificación de intervenciones como argumentaciones por parte de los profesores. Es decir, la reformulación de los datos y su incorporación al discurso es una actividad característica de las prácticas argumentativas del aula, según la interpretación de estos profesores.

Estos mismos ejemplos también sugieren que los profesores consideran lo que llamaremos *continuidad discursiva* dentro de la realización de una tarea colectiva en el aula de matemáticas: los datos, garantías, tesis, etc., mencionados en intervenciones previas se "reciclan" para dar sentido a las nuevas emisiones; en particular para delimitar el campo semántico de los conceptos en juego y para reconformar el contenido semántico de los discursos de los participantes. Ejemplos en este sentido los constituyen las respuestas de P6 a los incisos 1.3 y 2.1:

> "Es como una escalera y todos los peldaños son iguales, por eso es una relación directamente proporcional. Se trata de una argumentación tipo causa-consecuencia: al

hacer la gráfica, es una línea recta, y los escalones son todos iguales, de donde se deriva que han de ser directamente proporcionales".

"Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más. Se ve claramente. A mí me parece claro". Después de comprobar que Y tiene un volumen mayor que X, dice: "pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?" Es una argumentación porque se extrae la conclusión de que el dibujo no está bien hecho, a partir de la comprobación con cálculos de que Y tiene un volumen mayor que X".

En el primer párrafo, P6 cita la analogía emitida en T1 (4), ubica su explicación en T1 (6) (después de que se produjo la gráfica, es decir el cambio de registro) y expone, sintéticamente, la argumentación que, según él, así se produce. Destaca elementos significativos, emitidos en distintos momentos, que establecen, una determinada idea. En el segundo ejemplo, este mismo profesor cita todas las intervenciones de D organizándolas de modo explicativo para justificar su identificación. Vincula las emisiones y eventos que se suscitan para dar coherencia cognitiva a su explicación haciendo una descripción estructural de la argumentación, que adquiere sentido a través de la concatenación de ciertas emisiones y sucesos.

Así, las interpretaciones de estos profesores acerca de la argumentación sugieren que dentro de las prácticas argumentativas del aula de matemáticas de secundaria, al menos en ciertas ocasiones en las que se trabaja colectivamente, una actividad crucial es la adecuación de los campos semánticos de los elementos que están en juego. Esta adecuación puede producirse a través de la incorporación de rasgos semánticos comunes (ampliación del campo semántico) o por incorporación de rasgos semánticos distintivos (clarificación del campo semántico), puede incluir contenidos y conceptos extramatemáticos y consiste, en parte, en la reformulación de los elementos presentes en las emisiones de los participantes. En este sentido identificamos el parafraseo y cambio de registro de representación de datos y la producción de analogías. Esto sucede en un marco de *continuidad discursiva*, en el que cada emisión y reconfiguración de campos semánticos condiciona el contenido semántico de las nuevas emisiones. En síntesis, puede decirse que en el aula de matemáticas de secundaria, en determinadas circunstancias, los contenidos semánticos ("matemáticos" y no) están en constante construcción y evaluación.

Esto contrasta con las prácticas habituales de los matemáticos profesionales y de los matemáticos en formación. Aunque en estos contextos el uso de reformulaciones que suponen fundaciones semánticas de los contenidos en juego es crucial, la adecuación del campo semántico dentro de los límites de la teoría es condición necesaria para la producción matemática: la "informalidad" (analogía, metáfora, uso de registros informales, etc.) es una conquista del rigor (Douek, 2007; Inglis y otros, 2007).

## Tema 2. "Marcas" lingüísticas asociadas a la presencia de argumentación

Algunas discrepancias entre las identificaciones de los profesores y nuestro documento de control llaman la atención. Nosotros consideramos las intervenciones T1 (2, 12) y T2 (3, 8) como argumentaciones (ver anexo 2); en cambio, gran cantidad de profesores no lo hace. De modo similar, consideramos que las intervenciones T1 (14, 15) no lo son (aunque en el segundo caso se incluyeron posibles salvedades), pero la mayoría de los profesores las identifica como argumentaciones. Una atención especial merece la intervención T2 (1), pues las dos interpretaciones que hacemos de esta intervención nos llevan a considerarla no-pertinente en el contexto del aula de matemáticas de secundaria por su falta de consistencia matemàtica; sin embargo, la mayoría de los profesores la identifican sin hacer consideraciones en este sentido. Por último, desde nuestra perspectiva, la intervención T2 (4) tiene al menos dos interpretaciones posibles en términos de la conclusión que pretende apoyar; aquí observamos que los profesores suelen identificar esta intervención y suscribir, con similar frecuencia, alguna de éstas sin plantear dudas al respecto.

### Estructura de las intervenciones

**T1 (2)** B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50

Sólo dos profesores, P1 y P2, identifican claramente esta intervención. P3 comenta: "(...) he dudado si era argumentación porque no completa el razonamiento pero lo he marcado porque después es en lo que se fundamenta para argumentar", de modo que no es claro si la identifica como tal o sólo pretende destacarla. P9 comenta que esta intervención es relevante porque "inicia el proceso (aporta datos numéricos)" e identifica el conjunto de intervenciones de B como argumentación. El resto de los profesores no la identifica.

**T2 (3)** D: Se ve claramente.

Sólo los profesores P2, P3 y P5 identifican esta intervención como argumentación; identifican además T2 (1) (y ninguna otra intervención de D en el episodio) y los tres proporcionan una única explicación para ambas intervenciones. Las explicaciones de P3 y P5 se basan en la función *#aportar datos para apoyar una tesis* y hacen hincapié en la resolución de la tarea propuesta, en cambio la explicación de P2 resulta inadecuada y simplemente nos explica "a qué se refiere el alumno".

Desde nuestra perspectiva, el rasgo común más importante entre estas dos intervenciones, considerándolas como argumentaciones (ver documento de control en el anexo 2), es que en ambas solo los datos involucrados son explícitos, quedando implícitas tanto la garantía como la tesis. Por supuesto podría haber controversia respecto a si las garantías y tesis que asignamos son sobreinterpretaciones, pero pensamos que esto no es así y, sobre todo, que en las discusiones en el aula de matemáticas es común observar este tipo de intervenciones.

Veamos ahora las explicaciones ofrecidas por los profesores que sí las identifican:

> **P1 sobre T1 (2):** "B rebate los cálculos de A, da los nuevos resultados y especifica por qué los anteriores no eran correctos".
> **P2 sobre T1 (2):** "Rebate la argumentación 1A añadiendo el dato de la cuota que A ha olvidado".

Ambas explicaciones se basan en las funciones argumentativas *#rebatir* y *#aportar datos para apoyar una tesis*. Por lo que consideramos que según ambos profesores esta intervención establece una duda razonable sobre la tesis de la intervención T1 (1) y, por lo tanto, que su interpretación es similar a la nuestra. Ninguno destaca garantías o tesis. Sobre esta intervención, P3 comenta: "(...) he dudado si era argumentación porque no completa el razonamiento pero lo he marcado porque después es en lo que se fundamenta para argumentar", reconociendo los datos aportados y destacando la "falta de estructura" de la intervención. P4, en su *reflexión*, comenta: "(...) que pueda haber argumentaciones en frases cortas y sencillas como 'es más grande y entonces le cabe más' me resulta difícil de entender"; como ya decíamos en el análisis de su cuestionario, esto se refiere a que una argumentación debe tener "ciertas partes" reconocibles y es en virtud de la evidencia de estas partes que el discurso deviene argumentativo. P4 plantea como problemática, para reconocer argumentaciones, la ausencia (en el sentido de ser explícitos) de estos elementos. P5 refiere como problemática para el reconocimiento de argumentaciones, en su *reflexión*, "la falta de conectores y la estructura de las frases"; entendemos, como ya habíamos hecho notar, que ve ciertas estructuras como características de discursos argumentativos y su ausencia, que no siempre es ausencia de argumentación, complica la identificación. En su *distinción* agrega: "Algunas no eran suficientemente precisas o eran incompletas (creo que deberían darse más detalles)", lo que refuerza la idea previa. La *reflexión* de P7 también es sintomática; a la solicitud de explicar si ha tenido dificultades para identificar argumentaciones responde "contando" la estrategia que ha seguido:

> "He intentado identificar qué parte de las intervenciones aportaba información que reforzara la idea defendida por los alumnos y luego me fijo en las palabras que para mí señalan argumentación en el sentido de seleccionar ideas (cada vez, por lo tanto, es como, etc.)".

Aunque no resulta clara la naturaleza de estas "palabras que señalan argumentación", distinguimos conectivos que asociamos usualmente con argumentaciones (Duval, 1999). Para P7 éstos constituyen una "marca" y su ausencia complica la tarea de identificar argumentaciones. Con base en esto, se desprende que la ausencia de elementos estructurales, en el sentido de Toulmin, complejiza la identificación de argumentaciones en los episodios presentados. Analicemos T1 (15) y T2 (1).

> **T1 (15)** B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

Todos los profesores identifican esta intervención como argumentación y en sus explicaciones vemos una fuerte presencia del código *#esquema*, que aplicamos cuando "el profesor destaca (presencia o ausencia de) aspectos estructurales a la Toulmin como características de la argumentación o para explicar por qué las intervenciones son (o no son) argumentaciones". Salvo la explicación de P2, que no es clara y la de P10, basada en la función argumentativa *#convencer a otros*, el resto de explicaciones relaciona lo expresado a modo de dato en la intervención y con la conclusión en T1 (13); es decir la estructura y la relación entre las partes que destacan en la intervención. La intervención, además, tiene una fuerte presencia de conectivos que regularmente se asocian con argumentaciones y que en este caso facilitan la lectura de la relación causal que se destaca. Desde nuestra perspectiva, sin embargo, T1 (15) no constituye una argumentación (ver el documento de control).

La intervención T2 (1) resulta también interesante para nuestro análisis.

**T2 (1)** D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.

En este caso, salvo P1, que no la considera argumentación y P6, que la considera como antecedente de la argumentación que destaca en T2 (8), todos los profesores la consideran como tal. En el documento de control (anexo 2) consignamos dos posibles interpretaciones para esta intervención, que presenta riqueza de conectivos y una estructura usual en argumentaciones deductivas; sólo a partir de una de ellas la consideramos argumentación (desde un punto de vista lógico) y en ambos casos resulta matemáticamente inadecuada. Es significativo, entonces, que los profesores la identifiquen sin alegar en este sentido. Algunas explicaciones representativas son:

**P3 sobre T2 (1):** "Son argumentaciones en cuanto le permiten decidir cuál le conviene llevar a Joan y lo justifica basándose en el dibujo ante los demás participantes".
**P5 sobre T2 (1):** "Porque, aunque erróneas, responden a la pregunta, aunque no sea una argumentación correcta y aunque sea basándose en la percepción".

Los profesores identifican una relación funcional clara entre el elemento que funciona como justificación y la conclusión emitida. Esto los lleva a identificar una argumentación en esta intervención. Sostenemos, pues, que la estructura, es decir, el conjunto de elementos que se articulan en un discurso de manera funcional para conformar una argumentación, en el sentido de Toulmin, constituye una fuerte "marca" reconocible a la hora de identificar argumentaciones. Actúa tanto en forma positiva como negativa, es decir, la presencia de estos elementos, así como de conectivos que contribuyen a establecer las relaciones entre éstos, facilita la identificación y su ausencia la dificulta. Es más, a partir de los análisis de T1 (15) y T2 (1), sugerimos que la estructura de una emisión puede incluso sugerir la presencia de argumentación donde no la hay o donde los contenidos semánticos resultan inconsistentes. Aunque habría que profundizar, los precedentes son indicios en el sentido indicado.

### Interpretación de las partes de una argumentación

Si, como vimos, la ausencia de algunos elementos dentro de una intervención fuerza la decisión sobre si se la debe considerar argumentativa, el hecho de que éstos sean mayoritariamente explícitos no elimina, per se, dicha situación. En nuestro documento de control consignamos dos posibles interpretaciones de la estructura, y por tanto del sentido, de T2 (4) (ver anexo 2) y en los cuestionarios observamos profesores que suscriben una u otra versión para identificar la intervención, con la excepción de P1, que explica por qué no la considera argumentación.

> **T2 (4)** E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?

La demanda explícita hecha a los profesores en relación con esta intervención (item 2.3 del cuestionario) fue "¿Hay argumentación en lo que dice E? ¿Cuál? Explica por qué es argumentación". Analicemos ahora las respuestas proporcionadas por los profesores que identifican esta intervención como argumentación[9]:

> **P2 sobre T2 (4):** "Sí, porque pone en duda que D tenga 'pruebas' de lo que dice, luego argumenta que es necesaria una fórmula que lo compruebe".
>
> **P3 sobre T2 (4):** "Sí. Porque desvía la argumentación iniciada por D hacia una medida objetiva que sabe que le permitirá decidir cuál escoger y convencer a D sobre lo erróneo de su decisión. Permite llegar a una conclusión y, además, a la visión crítica del dibujo por parte de D".
>
> **P4 sobre T2 (4):** "A partir de la observación anterior deduce que hay que utilizar la fórmula del volumen. Creo que las dos frases conjuntamente son una argumentación [se refiere a las dos porciones que subraya en la intervención]. La capacidad está relacionada con el volumen, que a su vez se determina a partir de unas determinadas magnitudes con las cuales podemos utilizar una fórmula".
>
> **P5 sobre T2 (4):** "Asume que X es más alta que Y, pero como Y es más ancha y las dos variables están relacionadas en el volumen, eso le induce a plantearse si la afirmación de su compañero es cierta.
> Por lo tanto argumenta su duda con la contraposición de tamaño de ambas medidas".
>
> **P6 sobre T2 (4):** "Sí, que la botella Y es más ancha que X, por lo que podría darse el caso que tuviera más capacidad.
> Es argumentación porque el alumno ve que el dibujo le puede estar llevando a una conclusión errónea. Es argumentación porque formula una hipótesis: 'podría darse el caso que tuviera más capacidad'".
>
> **P7 sobre T2 (4):** "'Pero la otra es más ancha (…) habría que sacar el volumen', E se da cuenta de que varían altura y radio y no tiene claro cómo van a afectar al volumen estas variaciones, por eso dice 'habría que sacar el volumen'".
>
> **P8 sobre T2 (4):** "Es argumentación porque hace una afirmación basándose en la observación de que es más ancha".

---

[9] P9 no se considera pues la identifica como parte de una argumentación que incluye otra intervención.

> **P10 sobre T2 (4):** "El alumno E formula 'razones' (argumentos) que cuestionan la proposición que D considera válida. Su objetivo también es influir en el pensamiento de los demás con argumentos, pero en este caso no busca ratificar una proposición en concreto, sino que cuestiona, pone en duda la que formula un compañero con el objetivo de llegar a una conclusión".

Sólo P4, P5 y P6 parecen intentar responder, a partir de parafraseos explicativos, "cuál" es la argumentación del alumno en esta intervención. Estos parafraseos permiten identificar "con claridad"[10] las interpretaciones que estos profesores hacen de las partes de esta intervención:

P4 suscribe la **segunda** versión de esta intervención y utiliza el verbo *deducir* para la conclusión, haciendo hincapié en la *necesidad* de la conclusión. Es interesante notar, por otro lado, que su respuesta resulta "menos clara" en el sentido de explicar por qué la intervención es una argumentación.

P5 articula las partes que identifica de modo que la conclusión resultante corresponde a la **primera** versión de la intervención. Identificamos la "duda" de P5 con el calificador modal *posiblemente* que asignamos en dicha versión (poner en duda una afirmación es asumir la posibilidad de su negación). Al igual que en el caso de P4, la explicación acerca de por qué es una argumentación resulta vaga.

P6 suscribe la **primera** versión de la intervención parafraseando lo dicho y articulando de forma clara las partes. Provee una explicación explícita acerca de por qué es una argumentación que resulta coherente con la caracterización dada, destacando "formular hipótesis" (que asociamos en este caso con establecer una tesis con un calificador modal "débil") como parte de la actividad argumentativa.

En el caso del resto de los profesores que identifican esta intervención no podemos destacar una respuesta deliberada a la pregunta "cuál es la argumentación en esta intervención". Sin embargo, hay elementos presentes en sus respuestas que posibilitan asociar algunas con versiones propuestas. La respuesta de P2 no permite concluir acerca de qué versión considera; destaca la "puesta en duda" de la tesis, lo cual asociamos a la primera versión, y destaca la conclusión de la segunda calificándola como "necesaria". Del mismo modo, la respuesta de P3 resulta poco clara en este sentido, aunque el hecho de que destaque la "medida objetiva" como el

[10] Arguyendo acerca de la ambigüedad en la interpretación debemos usar comillas en este caso.

elemento fundamental de la intervención sugiere que la **segunda** versión inspira su explicación. De modo similar a P3, la respuesta de P7 es poco clarificadora, aunque parece asumir la **segunda** versión destacando su conclusión. En el caso de P8 es imposible determinar a qué “afirmación” se refiere, por lo que no podemos asociarla con versión alguna. P10, en cambio, considera que en esta intervención se “pone en duda” la tesis propuesta, por lo que asociamos su respuesta con la **primera** versión.

Observamos, entonces, que los profesores que identifican esta intervención hacen distintas interpretaciones sobre sus partes e, incluso del sentido de la emisión, de “lo que se pretende decir”. Ningún profesor planteó, deliberadamente, dudas acerca del sentido de la intervención, de la tesis sostenida o de alguna otra de las partes que destacaron; hecho que se repite en la práctica totalidad de las explicaciones.

Una primera intuición respecto a esta intervención, que motivó su diseño e inclusión en el cuestionario, planteaba que posiblemente los profesores identificarían con mayor facilidad y/o frecuencia la conclusión con el calificador modal más fuerte, asociable al calificador *necesariamente*. Sin embargo, hay interpretaciones en ambos sentidos. Contamos aún con pocos elementos para aventurar ulteriores conjeturas en relación con este hecho, pero, tomando en cuenta la ambigüedad con que en ocasiones se desarrollan las discusiones en el aula, resulta relevante comprobar que los profesores realizan diversas interpretaciones acerca de lo que se dice y que éstas pueden, incluso, determinar el contenido e intención discursivos de una emisión y, por lo tanto, condicionar positiva o negativamente su identificación como argumentación.

### Proximidad semántica

Tomemos las intervenciones T1 (12) y T2 (8). Desde nuestra perspectiva, ambas son argumentaciones (ver Anexo 2) y, sin embargo, sólo P6 y P10 consideran la primera como tal y sólo cuatro profesores (P2, P4, P5, P6) la segunda.

.

**T2 (8)** D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?

**T1 (12)** C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!

En ambos casos, consideramos que los elementos estructurales, mayoritariamente explícitos en el segundo, así como los vínculos funcionales entre éstos, resultan bastante evidentes y por lo tanto, si analizamos las intervenciones desde el punto de vista estructural, son pocas, si las hay, las objeciones que se pueden poner en este sentido. Esto lleva a reflexionar respecto a las escasas identificaciones de las que fueron objeto. Veamos las explicaciones de P6, que ilustran elementos de estas intervenciones, incluso implícitos, y su articulación:

> **P6 sobre T2 (8):** "Es una argumentación porque se extrae la conclusión de que el dibujo no está bien hecho, a partir de la comprobación con cálculos de que Y tiene un volumen mayor que X".
> **P6 sobre T2 (12):** "Se trata de nuevo de una argumentación tipo causa-consecuencia: como entrar en el super vale 2€ aunque no se compre nada, si no quiero gastar, mejor no entrar en el super. Se quiere "convencer" al otro.

Una característica común a estas intervenciones, deliberadamente originadas en el proceso de diseño del cuestionario, es que parecen referirse a cuestiones periféricas del problema tratado, es decir, parecen no referirse a la cuestión que motiva la discusión. Ambas, por otro lado, consignan contenidos aparentemente desvinculados de los contenidos matemáticos más evidentes (o más pertinentes); a pesar de lo cual resultan relevantes: la primera arroja luz en la discusión que, según se explicita en el episodio, el profesor pretende fomentar y la segunda motiva la resolución del problema. Sugerimos que la "distancia" entre el tema (aparentemente) central de la discusión y la emisión previene las intervenciones de ser consideradas argumentaciones. Es posible que los contenidos semánticos, o, mejor dicho, las interpretaciones que en relación con los contenidos semánticos de una intervención se realicen, condicionen que se la considere argumentativa en el marco de una discusión con ciertos contenidos matemáticos. Esta "distancia semántica" puede hacer que pasen desapercibidos otros elementos que sugieran argumentación o que resulten insuficientes como evidencia.

Debido al diseño de la investigación (en particular del instrumento) contamos con escasa información acerca de por qué los profesores no identifican ciertas intervenciones. Una indagación en este sentido tendrá que ser postergada. El único profesor que se refiere negativamente a esta intervención es P4:

> **P4 sobre T2 (8):** "Cuando dice que 'el dibujo no está bien hecho' yo creo que sólo observa pero no argumenta".

Por un lado, siendo excepcional que los profesores se refieran en sentido negativo a las intervenciones (justificando por qué no las consideran argumentaciones), podemos suponer que para P4 esta intervención fue motivo de reflexión; a partir de la cual se decantó por no considerar la intervención como una argumentación diciendo que el alumno "observa pero no argumenta". Aunque resulta difícil saber a qué se refiere, se sugiere que el alumno enuncia una tesis sin proporcionar justificación bastante, lo cual difiere de nuestra interpretación de la intervención. En definitiva, es nula la evidencia que podemos obtener a partir de esta respuesta. En cambio, la intervención T1 (14) puede arrojar alguna luz en este sentido.

> **T1 (14)** C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…

A pesar de estar aparentemente relacionada con la cuestión tratada y de consignar contenidos aparentemente matemáticos, no hay elementos para identificarla como argumentación y sin embargo seis profesores lo hacen (P2, P3, P4, P6, P7 y P10). Sólo P6 destaca elementos estructurales y establece una relación funcional.

> **P6 sobre T1 (14):** "Aquí es una argumentación en la medida que "se describe" lo que pasa: si ponemos el (0,2), sí que es una recta, para intentar inducir la conclusión: "es una recta", a partir de la constatación de que pasa por el (0,2)".

P6 se basa en la relación de causalidad evidente en la intervención. Sin embargo, que exista causalidad en esta ocasión, no implica que la intervención sea argumentación, pues es la mera enunciación de un hecho evidente si consideramos la situación y sus antecedentes. En cambio, el resto de profesores que identifican la intervención recurre a la función argumentativa *#convencer a otros* en sus explicaciones o consignan narrativamente la constatación del alumno. Dos explicaciones representativas son:

> **P7 sobre T1 (14):** "En (14), C se da cuenta de que partiendo del punto (0,2) se mantiene la forma de línea recta".
> **P3 sobre T1 (14):** "Son argumentaciones [se refiere a T1 (4, 6, 14)] porque quiere convencerse y convencer a los demás de que la situación planteada corresponde a sus conocimientos sobre la proporcionalidad directa (sosteniéndose en la gráfica en el fragmento 6)".

En ningún caso las explicaciones proporcionadas resultan concluyentes y en cambio parecen "frágiles" o incluso, como en el caso de P7, insatisfactorias. Aunque nos vemos con datos insuficientes para ser asertivos, consideramos que este hecho es indicativo, en sentido complementario, del que sugeríamos más arriba: la proximidad semántica de la intervención con la cuestión tratada actúa positivamente a la hora de identificar argumentaciones; a pesar de no haber elementos suficientes, el hecho de consignar contenidos (aparentemente) matemáticos y de estar vinculada directamente con la problemática tratada condiciona positivamente la identificación.

### Factores que pueden condicionar la identificación de discursos argumentativos en el aula de matemáticas de secundaria

Hasta aquí hemos proveído indicios, y en ocasiones evidencias, respecto de algunas cuestiones que pueden condicionar la identificación de argumentaciones. Sintéticamente sugerimos que:

-La consignación explícita de elementos estructurales, en el sentido de Toulmin, y la evidencia de su articulación, ya sea de modo sintáctico o a través de conectivos, resultan “marcas” reconocibles importantes que actúan positiva o negativamente en la identificación de argumentaciones; sugiriendo la presencia de argumentación incluso donde no la hay.

-Los profesores realizan interpretaciones acerca de *lo que se dice* que determinan el sentido y significado de las emisiones y éstas determinan, incluso, la tesis que (aparentemente) pretende ser apoyada. La identificación queda supeditada, entonces, al sentido que esta interpretación asigna.

-La “distancia semántica” entre qué se dice, es decir, los contenidos semánticos (matemáticos y no) involucrados en una emisión, y qué se discute, es decir, el tema tratado y los contenidos (matemáticos y no) que se le asocian, condiciona positiva o negativamente la identificación de argumentaciones. Es más fácil identificar una argumentación que “se refiere al asunto tratado” que una “que se refiere a un tema (aparentemente) periférico”. A su vez, una intervención no argumentativa puede pasar por tal si en ella se identifican contenidos “semánticamente próximos” a la cuestión.

# 7. Discusión, conclusiones y prospectiva

En esta sección sintetizamos y discutimos nuestros resultados, nuestros métodos para obtenerlos, y aproximamos unas primeras respuestas a la cuestión de investigación. También apuntamos algunos aspectos significativos a modo de prospectiva y como guía para la elaboración de nuestro proyecto de tesis doctoral. Antes, sin embargo, queremos poner de relieve que la calidad y cantidad en las respuestas a la cuestión de investigación tienen principalmente que ver con la calidad y cantidad en los procesos de elaboración de temas emergentes. Esto significa, en particular, que es necesario dar continuidad a la elaboración de temas para lograr una aproximación más detallada a nuestra cuestión fundamental.

## *7.1 Discusión sobre la cuestión de investigación*

En esta investigación nos propusimos estudiar, **para un grupo de profesorado de matemáticas de educación secundaria, ¿cuáles son las interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas y qué involucran?**

En este sentido, hemos proporcionado evidencias que indican particularidades importantes en relación con las visiones que un pequeño grupo de profesorado de matemáticas tiene acerca de las prácticas argumentativas del aula en la educación secundaria. Aunque, por supuesto, cada profesor muestra interpretaciones específicas que lo hacen único desde la perspectiva de su perfil discursivo, hay similitudes que permiten la construcción de temas emergentes y que confirman la posibilidad de examinar los resultados parciales de nuestro estudio como un todo.

Para empezar, dentro del repertorio de prácticas asociadas a la argumentación en esta etapa, la mayoría de profesores del grupo considera la adecuación de los campos semánticos de conceptos involucrados en un determinado discurso. En contraste con lo que sucede entre matemáticos profesionales y en formación, donde la adecuación apriorística de los campos semánticos a la teoría es un requisito esencial en el abordaje de sus estudios, las interpretaciones acerca de la argumentación de este grupo de profesores sugieren que la incorporación de rasgos semánticos comunes (ampliación del campo semántico) y la incorporación de rasgos semánticos distintivos (clarificación del campo semántico), tanto relacionados con conceptos matemáticos como extramatemáticos, son importantes en el trabajo colectivo del aula. Según evidenciamos, esta práctica consiste, al menos en parte, en la reformulación de elementos presentes en las emisiones de los participantes a través de parafraseos, cambios de registro de representación de datos y producción de analogías en un marco de *continuidad discursiva*, en el que cada emisión, y la consiguiente reconfiguración de campos semánticos, condiciona la interpretación de los contenidos de emisiones posteriores. Según estos profesores, en el contexto de argumentación en el aula de matemáticas, los contenidos semánticos están sujetos a constantes construcciones, reconfiguraciones y evaluaciones por parte de los participantes.

Complementariamente, hemos encontrado referencias a la *distancia semántica* entre *aquello que se dice* y *aquello que se trata*. Esta distancia se ve como un factor que condiciona, tanto positiva como negativamente, la identificación de discursos argumentativos. Se observó la tendencia entre los profesores a identificar con mayor frecuencia emisiones cuyos contenidos semánticos son más cercanos a aquellos relacionados con el tema que se trabaja explícitamente en los episodios. Recabamos también evidencias que sugieren que *aquello que se dice* está condicionado por las interpretaciones que se realizan y que éstas pueden determinar, incluso, la identificación de las tesis que pretenden ser apoyadas a través de los argumentos esgrimidos, supeditando así la identificación de argumentaciones a esta actividad interpretativa. Del mismo modo, según nuestro análisis, la consignación explícita de elementos estructurales (en el sentido de Toulmin) y la evidencia de su articulación, ya sea sugerida por la sintaxis o por los conectivos (de todo tipo) reconocibles, actúa positivamente en el reconocimiento de argumentaciones y, en cambio, la ausencia de elementos explícitos o de sintaxis “sugerentes” actúa negativamente.

Consideramos todas estas evidencias como indicativas. Ulteriores investigaciones, diseñadas con propósitos específicos que integren nuestros resultados actuales, podrían explorar estas cuestiones con mayor profundidad, desarrollando comprensiones más detalladas acerca de estos temas. Así pues, entendemos que estos resultados resultan relevantes ya que documentan cuestiones específicas vinculadas a las interpretaciones del profesorado acerca de la argumentación en la etapa secundaria de la educación matemática, y además sugieren líneas de investigación en el área para las cuales aportan evidencias preliminares.

Queremos recalcar que los resultados obtenidos se refieren a este grupo de profesores y que son, a grandes rasgos, de naturaleza indicativa. Los alcances y las limitaciones de nuestro estudio nos obligan a ser cautos. Sin embargo, insistimos en que son resultados relevantes como preámbulo de futuras investigaciones, indicando posibles temáticas y trayectorias investigativas de interés. En este sentido, no son sólo los resultados consignados los únicos productos relevantes; son muchas las conjeturas, hipótesis e intuiciones que se han forjado durante el proceso de análisis y que, junto con éstos, constituyen, sin dudas, un prolegómeno fundamental de futuros trabajos; en particular lo será de la tesis doctoral del autor.

## *7.2 Revisión de aspectos metodológicos*

Hacemos un balance general positivo acerca del diseño metodológico y de su implementación en nuestra investigación. Consideramos que los cuestionarios fueron adecuados a los cometidos de la investigación y que la “multidimensionalidad” de sus preguntas, como la describimos en la sección correspondiente (p. 24), resultó un diseño acertado pues ha consentido triangular los datos al interior de éstos otorgando credibilidad a nuestro análisis. Por otra parte, consideramos que el diseño de las preguntas del cuestionario probablemente predispuso a los participantes a destacar las intervenciones individuales de los episodios o el conjunto de intervenciones de un mismo individuo como unidades de análisis para identificar argumentaciones. Aunque no es posible redactar las preguntas de un modo absolutamente neutral en el sentido de no interferir en la interpretación de quien las lee, pensamos que reflexiones oportunas al respecto hubieran llevado a un diseño que considerara y tratara de mejor manera este aspecto. Por ejemplo, el hecho de pedir que se subrayaran intervenciones fue sin duda un elemento de influencia que cabría reconsiderar.

Reflexionando acerca de las respuestas de los profesores y haciendo análisis sutiles de ellas, encontramos deficiencias en la redacción de los episodios. Algunas de estas deficiencias hicieron perder parte del control sobre las características de los episodios y dejaron la puerta abierta a distintas posibilidades interpretativas por parte de los profesores. La falta parcial de control sobre las posibles interpretaciones del texto de

los episodios impidió, en ciertas ocasiones, hacer análisis consistentes sin sobreinterpretar las respuestas de los profesores. Un ejemplo en este sentido es la redacción de la Tarea 2: en ella parece quedar establecido que las medidas “reales” de los envases son las que se consignan numéricamente, es decir, el registro numérico parece tener preponderancia sobre el gráfico a partir de la redacción de la tarea. Nuestra intención era explorar en las respuestas de los profesores la pertinencia de ambos registros en el marco de las prácticas argumentativas del aula; sin embargo, esta asimetría impidió hacer consideraciones al respecto sin tener que sobreinterpretar la lectura que realizaron los profesores de este texto.
Reconocemos que la aplicación de entrevistas diseñadas *a posteriori* en función de análisis parciales hubiera sido pertinente. Su ausencia en nuestro diseño metodológico constituye una limitación para ampliar los alcances de la investigación. Entrevistas individuales posteriores hubieran permitido cotejar nuestras interpretaciones y conjeturas con la opinión de los propios participantes, consintiendo su confirmación o su consecuente modificación, lo que hubiera otorgado ulterior validez a nuestras interpretaciones permitiendo ampliar y refinar los resultados. Esta opción se descartó, básicamente, por cuestiones de tiempo y con la intención de no obtener un conjunto excesivo e inmanejable de datos en un trabajo breve de iniciación a la investigación.

Consideramos que el número de profesores participantes fue acertado, dadas las características de nuestra investigación, pues permitió tener una gran variedad de respuestas constituyendo aún un volumen de datos manejable. En todo momento tuvimos claro que nuestro estudio no pretendía obtener ningún tipo de generalización. Por otra parte, hacemos una valoración positiva en torno a cómo se seleccionaron los distintos profesores. A pesar de que no teníamos garantías de que los diez profesores acabaran siendo buenos informantes, y a riesgo de haber escogido perfiles demasiado similares (sobre todo por el grado de desarrollo profesional atribuible a su vinculación con proyectos anteriores y a su dilatada experiencia en el aula), los datos proporcionados por todos ellos han tenido por si mismos un interés intrínseco y han contribuido a ilustrar interpretaciones múltiples acerca de la argumentación en el aula de matemáticas.

En otro orden de cosas, la adopción del software de análisis de datos cualitativos Atlas.ti, la cual se realizó de manera posterior al inicio de los vaciados y análisis de los cuestionarios, fue un gran acierto pues constituyó una herramienta indispensable para el análisis y el tratamiento de datos y para la cohesión general de las acciones de investigación. Una falencia que observamos dentro de nuestro flujo de trabajo en el entorno Atlas.ti es la documentación poco precisa, por nuestra parte, de las definiciones de los códigos utilizados y de sus subsecuentes modificaciones a lo largo del proceso de análisis así como de las correcciones en la codificación que éstos suscitaron. Un seguimiento sucinto de los códigos, de su desarrollo y aplicación a lo largo de la investigación, hubiera permitido reportar aspectos interesantes del desarrollo de nuestras propias ideas a lo largo del análisis, reflejados en la necesidad de adecuación de los códigos, de los que no contamos con registro. En este mismo sentido, el reporte sistemático a partir de un diario de investigación se inició tarde y hoy lo consideramos un instrumento esencial.

Por último, los métodos implementados inspirados en aquellos de la Teoría Fundamentada, que adaptamos a partir de diversas fuentes, han sido pertinentes dentro de nuestra investigación y coherentes con sus objetivos. Aún así, somos conscientes de la “pauperización” de que han sido objeto algunos de los métodos en el proceso de adaptación (principalmente porque el método de comparación constante hubiera requerido su aplicación durante un periodo más extenso de tiempo) y de la consecuente pérdida de “potencia” que esto acarrea. Esperamos que esta memoria refleje los enormes esfuerzos hechos para otorgar fiabilidad y transparencia a nuestros métodos y procedimientos de investigación.

## *7.3 Prospectiva*

Asumiendo este trabajo como precedente de la tesis doctoral del autor, son variadas las cuestiones que, a partir de aquí, se presentan como relevantes. En primera instancia, queda claro que, siendo la argumentación un proceso vivo y participativo que se concreta en el aula, es a partir de datos del aula que cabe hacer investigación en este ámbito. Si bien este trabajo aporta antecedentes fundamentales, tanto a nivel teórico, mediante la revisión de la literatura y la conformación de un marco conceptual adecuado, como a nivel empírico, destacando aspectos relevantes, interpretaciones concretas y evidencias sobre estos aspectos, es a partir del estudio sistemático de la praxis argumentativa en el aula que se pueden obtener resultados dirigidos al diseño de experiencias de enseñanza-aprendizaje significativas para la formación de competencias argumentativas, tanto por parte del alumnado como del profesorado en funciones y del profesorado en formación. Esta es, pues, una idea básica orientadora para iniciar la elaboración del proyecto de tesis doctoral.

Nuestros resultados sugieren que el estudio de los rasgos específicos de las prácticas argumentativas de este nivel escolar constituye un área relevante de interés para la investigación en educación matemática. En particular en relación con los contenidos, matemáticos y no, implicados en los argumentos. A raíz de esto, sugerimos que una dimensión importante que debe abordarse, complementaria a la dimensión semántica, es la que respecta a los aspectos epistemológicos involucrados, que validan, por un lado, los conocimientos implicados y que determinan, por otro, sus valores teorético-funcionales en el discurso; esta es una cuestión fundamental en el desarrollo de conocimiento matemático y de las matemáticas como teoría autónoma. Consideramos que investigar profunda y sistemáticamente los mecanismos de validación del conocimiento matemático y cómo estos mecanismos condicionan la práctica argumentativa en el aula puede ser de gran valía para establecer criterios que guíen el trabajo en torno a competencias argumentativas en este nivel educativo.

Tomando e cuenta el valor que el profesorado participante otorga a las reformulaciones de contenidos como parte de las prácticas argumentativas del aula y a la adecuación de campos semánticos, es de interés investigar, dentro del marco de la argumentación, las relaciones matemáticamente significativas entre distintas representaciones y sus aspectos semánticos asociados, así como entre distintos registros semióticos de representación y su implicación dentro de la construcción de nociones matemáticas.

Como trabajo previo a la conformación del proyecto de tesis doctoral, habremos de revisar la literatura relativa a las cuestiones mencionadas en aras de documentarnos y de encontrar un nicho de investigación que resulte relevante y dé continuidad a los trabajos que ya hemos iniciado y de los cuales esta memoria da cuenta parcialmente.

# Referencias bibliográficas


Bernard, H. R., & Ryan, G. W. (2010). *Analyzing qualitative data: Systematic approaches*. Los Angeles, CA: Sage Publishers.

Boeije, H.( 2002). A purposeful approach to the constant comparative method of analysis of qualitative interviews. *Quality & Quantity, 36*, 391-409.

Boero, P., Douek, N., & Ferrari, P. L. (2002). Developing mastery of natural language: Approaches to theoretical aspects of mathematics. En L. D. English (Ed.), *International Handbook of Research in Mathematics Education* (241-268). Londres, Reino Unido: LEA.

Boero, P. (en prensa). Argumentation and proof: Discussing a "successful" classroom discussion. En T. Rowland y otros (Eds.), *Proceedings of the Seventh European Conference of Research on Mathematics Education*. Rszéskow, Polonia: CERME.

Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Tesis Doctoral.Valencia: Universitat de València.

Cohen, L., & Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Roma: Pitagora Editrice.

De Gamboa, G., Planas, N., & Edo, M. (2010). Argumentación matemática: Prácticas escritas e interpretaciones. *SUMA*, *64*, 35-44

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (163-181). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva? Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.*

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (137-162). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Gee, J. P. (1996). *An introduction to discourse analysis*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Glaser, B. & Strauss, A. (1965). *The discovery of Grounded Theory: Strategies for qualitative research*. Nueva York, NY: Aldine.

Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 3-21.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2002). Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structures. En L. D. English (Ed.), *International Handbook of Research in Mathematics Education* (165-195). Londres, Reino Unido: LEA.

Planas, N., Font, V., & Edo, M. (2009). La confrontación de normas en la construcción de discursos de la matemática escolar. *Paradigma, 30*(2), 125-142.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación, extraordinario,* 275-294.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 13-57.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing Grounded Theory*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Tilbury, D., & Walford, R. (1996). Defying the dominant paradigm in environmental education research. En M. Williams (Ed.), *Understanding geographical and environmental education: The role of research* (51-64). Londres, Reino Unido: Cassell Education.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Madrid: Península.

Van Manen, M. (1990). *Researching lived experience: Human science for an action sensitive pedagogy*. Londres, Canadá: University of Western Ontario.

# Anexos

## *Indice*

# Episodios de los cuestionarios

Tarea 1

**Para comprar en un supermercado de descuento es necesario hacerse socio pagando una cuota inicial de 2€. Una persona, que necesita 4 kg de manzanas, quiere comprar por primera vez en el supermercado. 1kg de manzanas cuesta 1.75€. ¿Qué tipo de relación hay entre el peso de las manzanas y su precio?**

Episodio 1

1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.

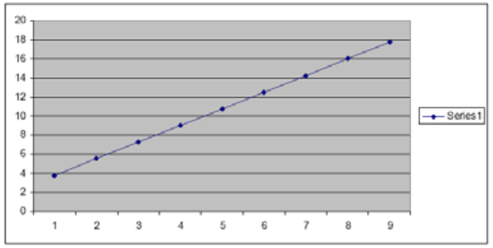
2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50

3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.

4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.

5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica.

| | |
|---|---|
| 1 | 3,75 |
| 2 | 5,5 |
| 3 | 7,25 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10,75 |
| 6 | 12,5 |
| 7 | 14,25 |
| 8 | 16 |
| 9 | 17,75 |




6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.

7 A: Sí y por eso es directamente proporcional.

8 B: Ya… No sé…

9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?

10 C: ¡Pues no gastaríamos nada!

11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…

12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!

13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.

14 C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…

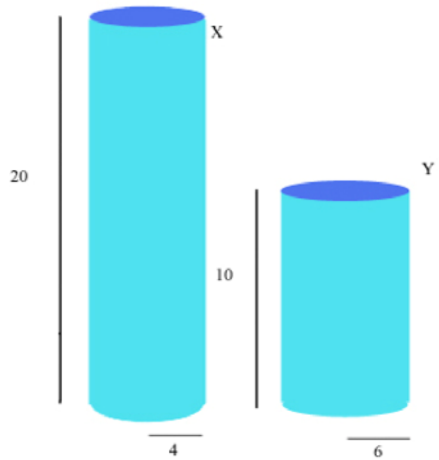
15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

Tarea 2

**Joan va a jugar a fútbol con sus amigos y quiere llevar la mayor cantidad de agu posible. Tiene dos botellas cilíndricas, una de radio 6 y altura 10 y la otra de radi 4 y altura 20. ¿Cuál le conviene llevar?**

Episodio 2

El profesor entrega un dibujo con proporciones intencionalmente erróneas para generar mayor discusión.




1 D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.

2 P: ¿Estás seguro de que es más grande?

3 D: Se ve claramente.

4 E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que saca el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?

5 D: Ummm… Pues a mí me parece claro.

6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?

Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = Pi\, r^2\, h$. Calculan los volúmenes: $Vx = 320 \cdot Pi$ y $Vy = 360 \cdot Pi$.

7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?

8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?

9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.

# Documento de control de las características delos episodios

Nota: se analizan sucintamente sólo las intervenciones inicialmente consideradas argumentaciones. Los lexemas antecedidos por un signo # corresponden a códigos utilizados en la codificación y su significado se discute más adelante. Se utilizan distintos tipos de letra para destacar distintos "campos" del documento. La expresión T1 [(2) G] se refiere a la garantía de la segunda intervención de la Tarea 1; en expresiones de este estilo el primer elemento consigna la Tarea correspondiente, el segundo la intervención a la que se hace referencia y el tercero el elemento estructural que se considera.

## <u>Tarea 1</u> (T1)

**(1) A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta 4 variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.**

D1: (1 kg de manzanas cuesta 1,75€, 2 kg 3,50, 4 kg 7€ y así)

Describe una variación que es efectivamente directamente proporcional ofreciendo ejemplos concretos y generalizando con un "y así". En el marco de la tarea es un dato falso porque no contempla el incremento en el precio de las manzanas debido al costo de la cuota inicial.

D2: (Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1,75)

Dato falso equivalente al anterior.

G: (Es la definición de directamente proporcional)

La garantía es funcionalmente adecuada y denota un entendimiento parcial del concepto de proporcionalidad y de relación directamente proporcional. Aunque el valor epistémico no es evidente apela al estatus de *definición* dentro del Corpus de Referencia.

C: (Por lo tanto es una relación directamente proporcional)

La conclusión pretende derivarse necesariamente de D1+D2 a través de G en el esquema argumentativo de A.

Conectivos Organizativos: "porque", "por lo tanto"

Funciones argumentativas: Establecer una tesis (enunciado objetivo) y aportar datos y garantías para apoyarla; convencer a otros

D1 y D2 constituyen #datosemergentes (se establecen *ad hoc* y están sujetos a verificación), en cambio G pretende el status de definición dentro del #corpusdereferencia. Nótese que G es la referencia a una definición que no se hace explícita.

Memo T1 (1): T1 - (1) tiene muchas características que permiten calificarla como argumentación; los datos, garantía y conclusión son explícitos; está articulada mediante conectivos organizativos claramente reconocibles y usualmente asociados a razonamientos deductivos; hace referencia a contenidos matemáticos y al corpus de referencia del aula de matemáticas.

**(2) B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50**

Cuando dice "Sí" concede que la inferencia de A es correcta. Inmediatamente niega [(1) D1] usando el conector argumentativo "pero", estableciendo:

D1: (1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50)

D1 es un dato correcto dentro de la tarea y es la conclusión de lo que podríamos considerar una argumentación implícita en la que [(1) D1] y (hay que pagar la cuota) son los datos y la garantía es la pertinencia de la adición en este caso. Si bien esto podría ser la enunciación de un hecho obvio creemos que hay que considerarlo una argumentación implícita en la medida en que reinterpreta la información en el marco del problema y se opone a [(1) D1].

G: *Implícita* [De datos falsos se pueden sacar conclusiones incorrectas]

C: *Implícita* [Es posible que [(1) C] sea incorrecta] B manifiesta desacuerdo al inicio de la frase diciendo (pero…). La conclusión se deriva necesariamente de D1 a través de G y aunque no se verbaliza es obvia. Destacamos que la conclusión no es la negación de [(1) G] pues en la intervención (1) la implicación es en una sola dirección y por lo tanto negando la premisa no se puede concluir la negación de la conclusión.

Conectivos Argumentativos: "pero"

Funciones argumentativas: evidenciar la falsedad de [(1) D1], establecer nuevos datos y poner en duda [(1) C]; convencer a otros y a sí mismo

Memo T1 (2): Esta intervención es compleja:

-Por un lado adolece de una estructura que la califique claramente como argumentación: tanto la garantía como la conclusión están implícitas;

-la intervención evidencia, de modo obvio, la falsedad de [(1) D1], lo que podría interpretarse como una argumentación *al margen* en la que se pretende establecer este hecho ó, en vista de la obviedad, puede considerarse sólo una explicación;

-dada la naturaleza pseudo-deductiva de T1 (1) (es (necesariamente) una relación directamente proporcional según la definición y las evidencias) el hecho de evidenciar la falsedad de los datos que apoyan esta tesis establece dos posibles tesis: *posiblemente no es una relación directamente proporcional*, si suponemos que la definición de proporcionalidad directa no es aún parte del Corpus de Referencia ó *(necesariamente) no es una relación directamente proporcional*, si suponemos que la definición es ya parte de este corpus. El Episodio sugiere que la definición no ha pasado aún a ser parte del Corpus de Referencia.

-El contenido es matemático, en el sentido de establecer datos de índole numérico y debido a la pertinencia de este registro en el aula de matemáticas.

-Aceptando lo anterior aceptamos también que tiene las Funciones Argumentativas listadas.

**(3) A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.**

D1: (cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual)

Implícitamente repite (1) parafraseando/reforzando [(1) D2].

D2: (Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual)

Busca consensuar/establecer una definición de *proporcionalidad directa* reforzando [(1) G]. No queda claro el valor epistémico de esta aseveración.

Conectivos Argumentativos: "¿Y eso qué?", puede considerarse similar a "aunque"

Conectivos Organizativos: "lo que importa para… es que…", puede considerarse similar a "por lo tanto"

Funciones argumentativas: redirigir el discurso, defender la tesis, reforzar [(1) G]; convencer a otros y a sí mismo

Memo T1 (3): T1 (3) no es una argumentación pues el emisor se limita a parafrasear lo que dijo en su intervención anterior (T1 (1)) sin aportar nuevos datos ni refuerzos para la garantía.

Podríamos considerarla una argumentación (equivalente a (1)) sólo si consideramos el hecho de que es emitida en otro momento y suponemos que esto es relevante en la discusión o que la paráfrasis que realiza reorganiza o amplifica las intervenciones anteriores.

Cuando A dice "¿Y eso qué?" objeta la puesta en duda de su tesis, aunque reconoce, o parece hacerlo, el valor de los datos aportados en la intervención anterior. Parafraseando su anterior intervención pretende establecer su definición (implícita) de proporcionalidad directa.

**(4) C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.**

D1: (es como una escalera y todos los peldaños son iguales)

Dice "Sí" confirmando lo dicho en (3) y usa una metáfora para replantear [(3) D1]. A partir de la lectura completa del texto es posible suponer, por ejemplo, que esta metáfora fue usada en clase y su validez quedó establecida. De ser así, su uso apela a #conocimientoscompartidos.

Conectivos Organizativos: "Así que…"

D1 es una comparación que podría considerarse un intento de #fundaciónsemántica del discurso.

Memo T1 (4): T1 - (4) no es una argumentación pues no hace más que aportar una metáfora explicativa cuyo contenido no aumenta ni potencia los datos disponibles.

Podríamos considerarla una argumentación (equivalente a (1)) sólo si consideramos el hecho de que es emitida en otro momento y suponemos que esto es relevante en la discusión o que la metáfora que aporta reorganiza o amplifica las intervenciones anteriores.

Es interesante notar que el contenido no es matemático

**(5) B: Espera, hagamos tabla y gráfica.**

Memo T1 (5): No es una argumentación. Propone un cambio de representación acorde con lo que podríamos esperar que fuera el trabajo previo del tema en clase.

La idea resulta significativa pues esta representación resultará útil en el devenir del episodio.

**(6) C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.**

D1: (Es una línea recta, y los escalones son todos iguales).

Memo T1 (6): T1 (6) no es una argumentación pues el emisor proporciona datos equivalentes a los ya mencionados, salvo por que esta vez provienen de un registro diferente y su contenido es "más matemático" al apelar a la noción de "línea recta".

Podríamos considerarla una argumentación (equivalente a (1)) sólo si consideramos el hecho de que es emitida en otro momento y suponemos que esto es relevante en la discusión o que el cambio de representación de los datos reorganiza o amplifica las intervenciones anteriores.

**(7) A: Sí y por eso es directamente proporcional.**

Conectivos Organizativos: "por eso"

Memo T1 (7): T1 (7) no es una argumentación pues se limita a recuperar lo dicho en intervenciones anteriores y a reiterar la tesis que éstas pretenden sostener organizando el discurso de modo obvio a través del conectivo organizativo *por eso*.

Podríamos considerarla una argumentación (equivalente a (1)) sólo si consideramos el hecho de que es emitida en otro momento y suponemos que esto es relevante en la discusión o que reorganiza o amplifica las intervenciones anteriores.

**(8) B: Ya… No sé…**

**(9) P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?**

**(10) C: ¡Pues no gastaríamos nada!**

D1: (¡Pues no gastaríamos nada!)

Conectivos Organizativos: "Pues", funciona combinando implícitamente (9)

Memo T1 (10): La aseveración está en camino de establecer que el punto (0,0) debe estar en la gráfica.

**(11) B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…**

**(12) C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!**

D1: (no quiero comprar nada)
Establece los datos de la argumentación.

D2: (entrar al supermercado cuesta 2€)
Establece los datos de la argumentación.

G: *Implícita* (no se deben realizar gastos innecesarios)

La garantía apela al #sentidocomún y es claramente considerada una noción compartida.

C: (mejor no entro)

Analogía que equivale a decir que en la tabla ha de registrarse (0,0) y no (0,2). La conclusión se deriva necesariamente de D1+D2 a través de G.

Conectivos Combinatorios: "y"
Conectivos Organizativos: "Si…(entonces)…"

Funciones argumentativas: establecer una tesis y aportar datos para apoyarla; convencer a otros y a sí mismo

Memo T1 (12): Aunque parezca un razonamiento ajeno al problema y sin relevancia matemática esto no es así pues determina la necesidad de que el punto (0,0) esté en la gráfica, cuestión que está a debate en este momento del episodio aunque sea a través del manejo mediante un registro ordinario de los elementos de la tarea.

La intervención tiene diversos elementos que nos permiten identificarla como argumentación: datos y conclusión explícitos, conectivos organizativos y combinatorios que evidencian la articulación de las partes.

**(13) B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.**

D1: (si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta)

Afirma que la gráfica de la relación no es una línea recta

G: *Implícita* [(1) G]

Definición hasta ahora (aparentemente) aceptada de *relación directamente proporcional*

C: (no puede ser una relación directamente proporcional)

La conclusión se deriva necesariamente de D1 a través de G.

Conectivos Organizativos: "Si… (entonces)…", "así que …"

Función argumentativa: rebatir, objetar los datos propuestos como apoyo de la tesis

La argumentación funciona por contrapuesta: no esa una línea recta implica que no es una variación directamente proporcional.

Memo T1 (13): T1 - (13) tiene muchas características que permiten calificarla como argumentación; los datos y conclusión son explícitos; está articulada mediante conectivos organizativos claramente reconocibles y usualmente asociados a razonamientos deductivos; hace referencia a contenidos matemáticos y al corpus de referencia del aula de matemáticas.

La argumentación funciona por contrapuesta: no es una línea recta implica que no es una variación directamente proporcional

**(14) C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…**

D1: (si ponemos el (0,2), sí que es una recta…)

Conectivos Argumentativos: "pero"
Conectivos Organizativos: "si… (entonces)..."

Memo T1 (14): No hay elementos suficientes para considerar esta intervención como una argumentación; hace una afirmación obvia del tipo "si … entonces …" que no contribuye a la discusión.

Aunque en vista de lo dicho (está claro que no se pagará 2€ si no se desea comprar nada) no tenga sentido que el punto (0,2) esté en la gráfica de la función el alumno explora esta situación. Esta falta de sentido evidente es la que, desde nuestro punto de vista, permite afirmar que esta intervención no puede ser una argumentación.

**(15) B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.**

Da una definición de *directamente proporcional* con base (aparentemente) en lo visto en clase.

D1: (en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero.)

Conectivos Argumentativos: "pero"
Conectivos Combinatorios: "y"
Conectivos Organizativos: "para que… ha de…", "deben"

Memo T1 (15): Esta intervención es compleja, por un lado presenta una serie de conectivos comúnmente asociado a frases argumentativas y por otro pretende establecer una nueva definición de "proporcionalidad directa" (que de hecho es correcta) con base en lo que el alumno considera como visto en clase. Sin embargo, las razones por las cuales la relación no es directamente proporcional fueron ya expuestas y esta intervención no las modifica; no hace más que enunciar una nueva definición sin establecer un vínculo explícito entre ella, los datos y garantías que se han expuesto y las conclusiones que se intenta reforzar.

Consideramos que no es una argumentación.

## <u>Tarea 2</u> T (2)

**(1) D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.**

D1: ((X) es más grande)

Dato sin sentido matemático pues "grande" no es un concepto matemático (en este caso) ni funciona como una analogía/metáfora aceptable matemáticamente. Si consideramos "más grande" como equivalente a "de mayor volumen" entonces la frase se convierte en una tautología. Si obviamos el valor semántico el estatus operacional adjudicado es válido.

G: *Implícita* -si un cuerpo es "más grande" entonces tiene mayor volumen-.

La garantía es incorrecta (carece de sentido) matemáticamente si consideramos que "grande" no es un concepto matemático (en este caso) ni funciona como una analogía/metáfora aceptable matemáticamente. Si consideramos "más grande" como equivalente a "de mayor volumen" entonces se convierte en un dato y la frase se convierte en una tautología. Si no los consideramos equivalentes el estatus operacional adjudicado es adecuado.

C: (Le conviene llevar la X) [que es equivalente en la frase a (le cabe más) si consideramos la mediación del texto de la Tarea]

La conclusión no se deriva de D1 +G. Si sólo consideramos la sintaxis y los estatus operacionales la argumentación es correcta y C deriva necesariamente de D1+G.

Conectivos Organizativos: "porque", "y entonces" [equivalente a "por lo tanto"]

Memo T2 (1): Hay distintos modos de interpretar esta intervención, por un lado, si consideramos "ser más grande" como equivalente a "tener mayor volumen" la intervención es simplemente una tautología cuyo valor de verdad depende del valor de verdad que le otorguemos a los datos provenientes del registro visual. En este caso no podemos considerarla una argumentación pues la frase se reduce a "le conviene llevar X pues evidentemente tiene mayor volumen".
Si en cambio consideramos "ser más grande" como una condición distinta de "tener mayor volumen" y suficiente para concluir la segunda, entonces la frase puede considerarse una argumentación correcta desde el punto de vista lógico (modus ponendo ponens), aunque no tenga sentido desde el punto de vista de las matemáticas pues "ser más grande" no es un concepto significativo en este caso. La conclusión, de este modo, deriva necesariamente y, una vez más, su valor de verdad depende del valor de verdad que le otorguemos a los datos provenientes del registro visual.
Desde el punto de vista de la clase de matemáticas es, en ambos casos, inadecuada como argumentación.

Es interesante notar que la estructura de la oración es habitual en argumentaciones y está articulada por conectivos habituales en éstas.

**(2) P: ¿Estás seguro de que es más grande?**

**(3) D: Se ve claramente.**

El esquema visual del problema está hecho a propósito para dar la impresión "claramente" de que el volumen de X es mayor que el de Y.

D1: (Se ve claramente) -hay evidencia aportada por el registro visual (modelo/registro semiótico) de que el volumen de X es mayor que el de Y-.

El alumno nota correctamente que a partir del registro visual del problema se cuenta con evidencia de que el volumen de X es mayor que el de Y. Esto es posible porque hay un abundante trabajo previo con este registro.

G: *Implícita* -Bajo ciertas condiciones, que se verifican en este caso, se puede asegurar a simple vista que el volumen de un cuerpo es mayor que el volumen otro cuerpo.

C: *Implícita* -El volumen de X es mayor que el de Y-.

**(4) E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?**

D1: (la otra es más ancha) -el radio de Y es mayor-

Dato explicitado en el problema.

D2: *Implícita* -el volumen depende del radio-

Los alumnos saben esto; es parte de los contenidos aprendidos a este nivel.

D3: *Implícita* -se puede poner en duda, razonablemente, que el registro visual represente correctamente la situación o, al menos, que en este caso aporte evidencia suficiente para concluir que el volumen de X es mayor que el de Y-.

G: (Habría que sacar el volumen) -la comparación directa de dos magnitudes nos permite determinar cuál es mayor-.

CM: (Podría) -posiblemente-.

C: (Podría ser que (Y) tuviera más volumen) -Y tiene mayor volumen-.

**ALTERNATIVA:**

D1: (la otra es más ancha) -el radio de Y es payor -

Dato explicitado en el problema.

D2: *Implícita* -el volumen depende del radio-

Los alumnos saben esto.

D3: (Podría ser que tuviera más volumen) -se puede poner en duda, razonablemente, que el registro visual represente correctamente la situación o, al menos, que en este caso aporte evidencia suficiente para concluir que el volumen de X es mayor que el de Y-.

G: *Implícita* -la comparación directa de dos magnitudes nos permite determinar cuál es mayor-.

CM: *Implícito* -Necesariamente-.

C: (Habría que sacar el volumen) -debemos calcular las magnitudes de los volúmenes-.

Conectivos Argumentativos: “pero”

Conectivos Organizativos: No hay CO explícitos, sin embargo la sintaxis cumple esta función

Memo T2 (4): Destacamos dos versiones distinguibles de esta argumentación que presentan calificadores modales distintos. Una pretende poner en duda la intervención anterior y la otra sostener que se deben calcular numéricamente los volúmenes. La primera se funda en rebatir las razones esgrimidas por D y la segunda en la necesidad de responder la pregunta del problema.

**(5) D: Ummm… Pues a mí me parece claro.**

Memo T2 (5): Esta intervención es similar a T2 (3)

Podríamos considerarla una argumentación (equivalente a (3)) sólo si consideramos el hecho de que es emitida en otro momento y suponemos que esto es relevante en la discusión porque considera los argumentos aportados en la intervención inmediata anterior y, a pesar de ello, reitera la postura sostenida.

**(6) P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?**

**(7) P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?**

**(8) D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?**

D1: Asume **[(3)** D1**] ("se ve claramente")**

D2: *Implícita* -el volumen de Y es mayor que el de X-.

G: *Implícita -modus tollendo tollens-*.

C: (el dibujo no está bien hecho)

Conclusión correcta y necesaria [Está en juego la validez del registro visual como registro semiótico válido]

Conectivos Argumentativos: “pero”

Conectivos Combinatorios: “si… entonces” [“si” (aquello representado por los datos numéricos es verdadero) “entonces” ( la representación gráfica es falsa)]

Memo T2 (8): La intervención establece una nueva tesis aparentemente desvinculada con la tarea; sin embargo es sumamente pertinente y en línea con los objetivos de la actividad que se han hecho explícitos (generar mayor discusión).

Es una argumentación por contrapuesta (*tollendo tollens*): D2 implica no D1. El único modo de negar D1 es que no tenga sentido, o sea que no represente la situación (desechamos el caso en que el alumno haya hecho una interpretación errónea).

**(9) P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito**

# Códigos creados *a priori*

**Conectivos argumentativos, combinatorios y organizativos**

| | | |
|---|---|---|
| C A ¿y eso qué? | C O deben | C O porque |
| C A pero | C O lo que iporta para... es que... | C O pues |
| C C si... entonces... | C O para que... ha de... | C O si... (entonces)... |
| C C y | C O por eso | C O y entonces |
| C O así que... | C O por lo tanto | |

**"Naturaleza" de los datos**

| | |
|---|---|
| D corpus de referencia (extramatemático) | Este código se refiere a todos aquellos datos/prácticas, ya sean fácticos, procedimentales, interpretativos, etc., que pueden ser considerados parte de un corpus común de referencias ajenas a la asignatura cuyos límites, vigencia, pertinencia y validez no son explícitos y responden a cuestiones contextuales, de status, identitarias, etc. |
| D corpus de referencia (matemático) | Este código se refiere a todos aquellos datos/prácticas, ya sean fácticos, procedimentales, interpretativos, etc., que pueden ser considerados parte de un corpus común de referencias adscribibles a la asignatura, cuyos límites, vigencia, pertinencia y validez no son necesariamente explícitos y responden a cuestiones contextuales, de status, identitarias, etc. |
| D datos emergentes | Referencia a Datos que emergen en el proceso de resolución; que son construidos a posteriori. |
| D fundación semántica | Este código aplicada a un cuestionario significa que el profesor destaca un proceso de fundación semántica (o en el que ésta está involucrada) como parte de la actividad argumentativa que se realiza, ya sea en general o en un fragmento particular.<br><br>Este código aplicado a los documentos de control significa que nosotros encontramos en ese fragmento un proceso de fundadción semántica. |
| D origen ignoto | Se refiere a datos cuya naturaleza no es clara pues el profesor no la hace explícita o no hay elementos suficientes para discernirla. |
| D registros semióticos | Aplicado a un cuestionario: Se destaca el registro semiótico al que el/los datos se adscribe/n (implícita o explícitamente). El discurso del profesor está en función del registro semiótico al que pertenecen los datos involucrados.<br><br>Aplicado a un documento de control: La pertenencia de los datos involucrados a un determinado registro semiótico puede condicionar la interpretación y la valoración de la intervención. |

**Estructura de las argumentaciones**

| | |
|---|---|
| Esq Completo | La intervención tiene el esquema, en el sentido de Toulmin, completo. |
| Esq Incompleto (D, G) | La intervención tiene el esquema, en el sentido de Toulmin, incompleto y carece de datos y garantías explícitas. |
| Esq Incompleto (G) | La intervención tiene el esquema, en el sentido de Toulmin, incompleto y carece de garantías explícitas. |
| Esq Incompleto (G, C) | La intervención tiene el esquema, en el sentido de Toulmin, incompleto y carece de garantías y conclusiones explícitas. |

**Funciones argumentativas**

| | |
|---|---|
| FA aportar datos para apoyar una tesis | Aplicado en un cuestionario en relación con una intervención o grupo de intervenciones particular: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa de la intervención: aportar datos para apoyar una tesis.<br><br>Aplicado en un cuestionario en relación con la argumentación en general: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa: aportar datos para apoyar una tesis.<br><br>Aplicado a un documento de control: Consideramos que una de las funciones argumentativas de la intervención es aportar datos para apoyar una tesis. |
| FA aportar garantías | Aplicado en un cuestionario en relación con una intervención o grupo de intervenciones particular: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa de la intervención: aportar garantías para pasar de los datos a la tesis.<br><br>Aplicado en un cuestionario en relación con la argumentación en general: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa: aportar garantías para pasar de los datos a la tesis. |

| | |
|---|---|
| | Aplicado a un documento de control: Consideramos que una de las funciones argumentativas de la intervención es aportar garantías para pasar de los datos a la tesis. |
| FA convencer a otros | Aplicado en un cuestionario en relación con una intervención o grupo de intervenciones particular: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa de la intervención: convencer a otros.<br><br>Aplicado en un cuestionario en relación con la argumentación en general: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa: convencer a otros.<br><br>Aplicado a un documento de control: Consideramos que una de las funciones argumentativas de la intervención es convencer a otros. |
| FA convencerse a uno mismo | Aplicado en un cuestionario en relación con una intervención o grupo de intervenciones particular: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa de la intervención: convencerse a uno mismo.<br><br>Aplicado en un cuestionario en relación con la argumentación en general: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa: convencerse a uno mismo.<br><br>Aplicado a un documento de control: Consideramos que una de las funciones argumentativas de la intervención es convencerse a uno mismo. |
| FA demostrar | Queda de relieve, explícita o implícitamente, que la función de la argumentación (en general o en una intervención particular) está vinculada, a través de los rasgos que el profesor destaca, a la demostración, entendiendo ésta como un caso particular de argumentación. |
| FA establecer condiciones de refutación | Aplicado en un cuestionario en relación con una intervención o grupo de intervenciones particular: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa de la intervención: establecer condiciones de refutación.<br><br>Aplicado en un cuestionario en relación con la argumentación en general: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa: establecer condiciones de refutación.<br><br>Aplicado a un documento de control: Consideramos que una de las funciones argumentativas de la intervención es establecer condiciones de refutación. |
| FA establecer una tesis | Aplicado en un cuestionario en relación con una intervención o grupo de intervenciones particular: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa de la intervención: establecer una tesis.<br><br>Aplicado en un cuestionario en relación con la argumentación en general: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa: establecer una tesis.<br><br>Aplicado a un documento de control: Consideramos que una de las funciones argumentativas de la intervención es establecer una tesis. |
| FA rebatir | Aplicado en un cuestionario en relación con una intervención o grupo de intervenciones particular: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa de la intervención: rebatir.<br><br>Aplicado en un cuestionario en relación con la argumentación en general: Queda de relieve, explícita o implícitamente, la función argumentativa: rebatir.<br><br>Aplicado a un documento de control: Consideramos que una de las funciones argumentativas de la intervención es rebatir. |

**Identificaciones**

| | |
|---|---|
| Id Incierto | No queda claro si identifica o no una argumentación. |
| Id NO | Considera explícitamente que la intervención no es una argumentación y explica este posicionamiento. |
| Id SI | Identifica la intervención como argumentación. |
| Id SI-- | Identifica al menos dos intervenciones como una argumentación. |

**Valor epistémico y valor de verdad**

| | |
|---|---|
| V epistémico | Se refiere al valor epistémico de una proposición. |
| V epistémico (necesario) | Aplica sólo a los documentos de control.<br><br>El valor epistémico de la proposición es, o pretende ser, "necesario". |
| V epistémico (posible) | Aplica sólo a los documentos de control. |

| | |
|---|---|
| | El valor epistémico de la proposición es, o pretende ser, "posible". |
| V verdad | Se refiere al valor de verdad de una proposición. |
| V verdad (carente de sentido) | Aplica sólo a los documentos de control.<br><br>El valor de verdad de la proposición no se puede determinar porque carece de sentido. |
| V verdad (falso) | Aplica sólo a los documentos de control.<br><br>El valor de verdad de la proposición es falso. |
| V verdad (verdadero) | Aplica sólo a los documentos de control.<br><br>El valor de verdad de la proposición es falso. |
| | |
| **Otros** | |
| contexto | El profesor consigna elementos característicos y claramente adscribibles a las prácticas del aula de matemáticas.<br><br>Aplica sólo a #E Reflexión y #E Caracterización. |
| Cualidad arg FUERZA | Hace referencia a la "fuerza" del argumento en el sentido de Duval (1999). |
| Cualidad arg PERTINENCIA | Hace referencia a la "pertinencia" del argumento en el sentido de Duval (1999). |
| Foco | Aplica sólo junto a #E caracterización.<br><br>Identifiaca el foco de la caracterización que hace el profesor. |

# Códigos creados *a posteriori*

| | |
|---|---|
| **Cuestiones emergentes** | |
| CE AMBIGÜEDAD | El profesor es ambiguo. No es claro que quiere decir o usa términos complejos y no definidos de modo que se presta a distintas interpretaciones. |
| CE AUTOREFERENCIALIDAD | El profesor utiliza un concepto definiéndolo autorrefernciaI o cíclicamente (e. g. es una argumentación porque argumenta). |
| CE CLARIFICACIÓN CONTENIDO SEMÁNTICO | El profesor busca aclarar/ampliar el contenido semántico de la intervención. Ya sea para justificar su explicación o para otorgarle coherencia (dentro del campo semántico) al episodio (ésta puede ser la base de su justificación). |
| CE CONECTIVOS | El profesor reconoce conectivos y los destaca como indicio de argumentación. |
| CE CONTINUIDAD EN EL DISCURSO | El profesor considera elementos de intervenciones anteriores (del mismo emisor o no) como elementos/antecedentes de la argumentación. |
| CE CONTRATO DIDÁCTICO | El profesor aporta elementos que consideramos vinculados a cláusulas habituales del contrato didáctico. |
| CE ESQUEMA | El profesor destaca (presencia o ausencia de) aspectos estructurales "a la Toulmin" como características de la argumentación o para explicar por qué las intervenciones son (o no son) argumentaciones. |
| CE EXPLICACIÓN IMPERTINENTE | La respuesta del profesor resulta incoherente con la tarea solicitada ("explica por qué son argumentaciones). |
| CE INTERPRETACIÓN | El profesor hace una interpretación personal de lo que sucede/se dice en la intervención. |
| CE LAXA | -“Caracterizaciones“ de la argumentación muy laxas, con una interpretación muy amplia que, en particular, no la distingue de la explicación |
| CE NARRATIVO | El profesor explica narrativamente por qué las intervenciones son argumentaciones. |
| CE PARAFRASEO EXPLICATIVO | En la explicación utiliza parafraseos de las intervenciones, añadiendo o no otros elementos. |
| CE RAZONAMIENTO | Se refiere explícitamente a un razonamiento deductivo, inductivo o a una inferencia |
| CE REFORMULACIÓN | La intervención es equivalente a una anterior (desde la perspectiva de nuestro documento de control), no aporta nuevos datos ni refuerza la garantía y sin embargo el profesor la considera una argumentación. |
| CE REGISTRO SEMIÓTICO | Se refiere de algún modo que resulta interesante (hace distinciones explícitas o explícitas, califica, reivindica, denosta, etc.) a registros semióticos que distingue o se distinguen en el discurso. |
| CE USO EQUIVALENTE ARGUMENTO-RAZÓN-DATO | Utiliza los conceptos de "argumento", "razón", "dato" de manera equivalente. |

| | |
|---|---|
| **Otros** | |
| Act explorar y formular hipótesis | Se refiere a "explorar" en el sentido de la resolución de problemas, donde ante un problema se emprenden "acciones" para tratar de comprenderlo y de elaborar hipótesis y estrategias de resolución.<br><br>Aplica sólo a P6 |
| FE conectar hechos/conceptos de maera coherente en un sistema | El profesor se refiere a una actividad que asociamos con explicar y disociamos de argumentar (en el sentido de la caracterización de Duval (1999)) |
| inconsistencia | Existe un conflicto entre la caracterización del profesor y la explicación donde se aplica. |

| **Turno (1)** | Control | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Datos, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -1 kg de manzanas cuesta 1,75€, 2 kg 3,50, 4 kg 7€ y así)<br><br>-Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1,75) | -unos cálculos | -1kg. -> 1,75€, 2kg. -> 3,5€ | x | x | -ejemplos concretos | -al aumentar 1 en una de ellas, la otra aumenta 1.75 | -expone una relación entre dos variables | -reconoce una relación entre variables | -argumento numérico | -“razones”<br><br>**[La referencia es poco específica]** |
| Garantías, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -Es la definición de directamente proporcional | -referencia a la definición | -según la definición de directamente proporcional. | -definición que los tres conocen para proporcionalidad directa | x | -su idea de “directamente proporcional” | -Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual | -relaciona con la definición de proporcionalidad directa. | -un concepto que conoce | -concepción errónea de la función de proporcionalidad directa | -“razones”<br><br>**[La referencia es poco específica]** |
| Tesis, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -Por lo tanto es una relación directamente proporcional | -es una relación directamente proporcional | x | x | -se trata de una variación directamente proporcional | x | -las dos variables son directamente proporcionales | x | x | -es una relación de proporcionalidad directa | -una proposición que considera cierta |
| Funciones argumentativas que se destacan en su explicación | -Establecer una tesis<br><br>-Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías<br><br>-Convencer a otros<br><br>-Convencerse a uno mismo | -Establecer una tesis<br><br>-Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías | -Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías | -Aportar garantías<br><br>-Convencer a otros<br><br>-Convencerse a uno mismo | -Aportar datos para apoyar una tesis | -Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías | -Establecer una tesis<br><br>-Aportar datos para apoyar una tesis | -Establecer una tesis<br><br>-Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías<br><br>-Convencer a otros | -Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías | -Establecer una tesis<br><br>-Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías | -Establecer una tesis<br><br>-Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías<br><br>-Convencer a otros |

x No hay elementos que destacar · considera más de un turno como una argumentación · No identifica argumentación · Elementos consignados en los controles de las características

**Turno 1**

| **Turno (3)** | Control | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Datos, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual [**paráfrasis**] | | -a incrementos iguales en la cantidad siguen incrementos iguales en precio. | x | -Precisa la argumentación anterior, ahora sin valores numéricos | x | -al aumentar 1 en una de ellas, la otra aumenta 1.75 | x | -el argumento sobre el que se basa para reconocer la proporcionalidad directa | -evidencia el aumento de las dos variables | -“razones”<br><br>**[La referencia es poco específica]** |
| Garantías, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual [**paráfrasis**] | | -Se apoya en la definición de “directamente proporcional” | -definición que los tres conocen para proporcionalidad directa | x | -una razón teórica | -Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual | -la idea básica de proporcionalidad directa | x | -concepción errónea de la función de proporcionalidad directa | -“razones”<br><br>**[La referencia es poco específica]** |
| Tesis, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | - *Implícita:* T1 [(1) C] | | x | -la situación planteada corresponde a la definición que los tres conocen para proporcionalidad directa | x | x | -las dos variables son directamente proporcionales | x | x | -es una relación de proporcionalidad directa | -una proposición que considera cierta |
| Funciones argumentativas que se destacan en su explicación | -Aportar garantías<br><br>-Convencer a otros | | -Aportar garantías | -Aportar garantías<br><br>-Convencer a otros<br><br>-Convencerse a uno mismo | -Aportar datos para apoyar una tesis | -Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías<br><br>-Rebatir | -Establecer una tesis<br><br>-Aportar datos para apoyar una tesis | -Establecer una tesis<br><br>-Aportar garantías<br><br>-Convencer a otros | x | -Establecer una tesis<br><br>-Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías | -Establecer una tesis<br><br>-Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Aportar garantías<br><br>-Convencer a otros |

x No hay elementos que destacar  considera más de un turno como una argumentación  No identifica argumentación  Elementos consignados en los controles de las características

**Turno 3**

| **Turno (4)** | Control | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Datos, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -es como una escalera y todos los peldaños son iguales [**analogía**] | -una comparación | -los peldaños son iguales | x | -*Referencia explícita a*: T1 [(4) D1] | -un ejemplo cotidiano<br>-ejemplos | | -una comparación | - la forma | -“los peldaños son iguales”<br>-“las escaleras son iguales” | -argumentos comparativos o ejemplificaciones |
| Garantías, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -*Implícita* [La definición, incorrecta y no explícita, que pone en juego A] | x | x | -sus conocimientos sobre la proporcionalidad directa | x | -su idea de D.P. | | x | x | -base errónea | x |
| Garantías, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -*Implícita* [La definición, incorrecta y no explícita, que pone en juego A] | x | x | -sus conocimientos sobre la proporcionalidad directa | x | -su idea de D.P. | | x | x | -base errónea | x |
| Tesis, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -es una relación directamente proporcional [**reiteración**] | -Afirma que es una relación directamente proporcional | x | x | - es una relación directamente proporcional | x | | x | -es una relación de proporcionalidad directa | x | -*Referencia explícita a*: T1 [(1) C] |
| Funciones argumentativas que se destacan en su explicación | -Aportar datos para apoyar una tesis<br>-Convencer a otros | -Aportar datos para apoyar una tesis<br>-Convencer a otros | -Aportar datos para apoyar una tesis | -Convencer a otros<br>-Convencerse a un mismo | -Aportar datos para apoyar una tesis | -Aportar datos para apoyar una tesis | | -Aportar datos para apoyar una tesis<br>-Convencer a otros | -Aportar datos para apoyar una tesis<br>-Establecer una tesis | -Aportar datos para apoyar una tesis | -Convencer a otros |

x No hay elementos que destacar · considera más de un turno como una argumentación · No identifica argumentación · Elementos consignados en los controles de las características

**Turno 4**

| **Turno (6)** | Control | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Datos, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | - Es una línea recta, y los escalones son todos iguales [**cambio de registro**] | -la tabla y en el gráfico<br><br>-*Referencia explícita imprecisa a*: T1 (4) | -los peldaños son iguales | x | | -ejemplos<br><br>-*Referencia explícita a*: T1 [(4) D1] | -es una línea recta<br><br>- Es como una escalera y todos los peldaños son iguales | -gráfica comentada<br><br>-su comparación en (4) | | -referencia a la línea recta | |
| Garantías, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -*Implicita*: pertinencia del registro<br><br>-*Implicita*: T1 [(1) G] | x | x | -sus conocimientos sobre la proporcionalidad directa | | -su idea de D.P. | x | x | | -base errónea | |
| Tesis, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -*Implícita*: T1 [(1) C] | -*Referencia explícita imprecisa a*: T1 (4) | x | x | | x | -han de ser directamente proporcionales | x | | x | |
| Funciones argumentativas que se destacan en su explicación | -Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Convencer a otros | -Aportar datos para apoyar una tesis | -Aportar datos para apoyar una tesis | -Convencer a otros<br><br>-Convencerse a uno mismo | | -Aportar datos para apoyar una tesis | -Aportar datos para apoyar una tesis | -Aportar datos para apoyar una tesis<br><br>-Convencer a otros | | -Aportar datos para apoyar una tesis | |

x No hay elementos que destacar; considera más de un turno como una argumentación; No identifica argumentación; Elementos consignados en los controles de las características

**Turno 6**

| **Turno (7)** | Control | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Datos, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -*Implícitos* [rescata los datos ya emitidos] | | -a incrementos iguales en la cantidad siguen incrementos iguales en precio. | x | | -*Referencia explícita a*: T1 (6), "coge la idea anterior" | | -*Referencia explícita a*: T1 (6), "recoge la idea expresada por C en (6)" | -*Referencia explícita a*: T1 (6), "lo que aporta C" | -la línea recta | -"razones"<br>**[La referencia es poco específica]** |
| Garantías, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -*Implícita*: T1 [(1) G] | | -Se apoya en la definición de "directamente proporcional" | -definición que los tres conocen para proporcionalidad directa | | x | | -*Referencia explícita a*: T1 (3), "lo que ha defendido en (3)" | X | -concepción errónea de la función de proporcionalidad directa | -"razones"<br>**[La referencia es poco específica]** |
| Tesis, o elementos que podrían funcionar como tales, que destaca en su explicación | -Es directamente proporcional [**reiteración**] | | X | -la situación planteada corresponde a la definición que los tres conocen para proporcionalidad directa | | -*Referencia explícita a*: T1 [(1) C] | | X | X | -es una relación de proporcionalidad directa | -una proposición que considera cierta |
| Funciones argumentativas que se destacan en su explicación | -Convencer a otros | | -Aportar garantías | -Aportar garantías<br>-Convencer a otros<br>-Convencerse a uno mismo | | -Aportar datos para apoyar una tesis<br>-Aportar garantías | | -Aportar datos para apoyar una tesis<br>-Convencer a otros | -Aportar datos para apoyar una tesis | -Establecer una tesis<br>-Aportar datos para apoyar una tesis<br>-Aportar garantías | -Establecer una tesis<br>-Aportar datos para apoyar una tesis<br>-Aportar garantías<br>-Convencer a otros |

x No hay elementos que destacar — considera más de un turno como una argumentación — No identifica argumentación — Elementos consignados en los controles de las características

**Turno 7**

Cuestionario del profesor P1

Tarea 1

**Para comprar en un supermercado de descuento es necesario hacerse socio pagando una cuota inicial de 2€. Una persona, que necesita 4 kg de manzanas, quiere comprar por primera vez en el supermercado. 1kg de manzanas cuesta 1.75€. ¿Qué tipo de relación hay entre el peso de las manzanas y su precio?**

Episodio 1

1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.

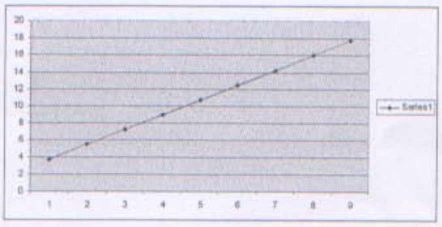
2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5.50

3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.

4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.

5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica.

| | |
|---|---|
| 1 | 3,75 |
| 2 | 5,5 |
| 3 | 7,25 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10,75 |
| 6 | 12,5 |
| 7 | 14,25 |
| 8 | 16 |
| 9 | 17,75 |



6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.

7 A: Sí y por eso es directamente proporcional.

8. B: Ya… No sé…

9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?

10 C: ¡Pues no gastaríamos nada!

11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…

12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!

13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.

14 C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…

15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

**2/6**

Cuestionario Tarea 1

1.1. Fijándote en las intervenciones de **A** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Afirma que es una relación directamente proporcional, aporta unos calculos y una referencia a la definición que respaldan su afirmación

1.2. Ahora haz lo mismo con las intervenciones de **B**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

(2) B rebate los cálculo de A, da los nuevos resultados y especifica porqué los anteriores no eran correctos

(13) Afirma que no lo és porquè no es una linea recta

(15) Afirma una cosa y aporta lo que vieron en clase

1.3. De nuevo haz lo mismo con las intervenciones de **C**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

(4) Afirma que es una relación directamente proporcional y añade a (3) una comparación para que sea más fácil de imaginar

(6) Se fija en la Tabla y en el gráfico para dar validez a su afirmación

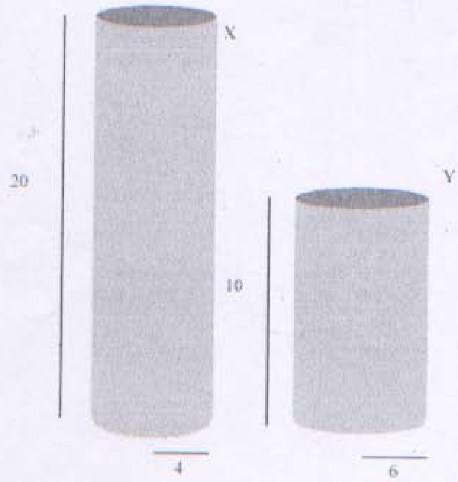
3/6

Tarea 2

**Joan va a jugar a fútbol con sus amigos y quiere llevar la mayor cantidad de agua posible. Tiene dos botellas cilíndricas, una de radio 6 y altura 10 y la otra de radio 4 y altura 20. ¿Cuál le conviene llevar?**

Episodio 2

El profesor entrega un dibujo con proporciones intencionalmente erróneas para generar mayor discusión.




1 D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.
2 P: ¿Estás seguro de que es más grande?
3 D: Se ve claramente.
4 E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?
5 D: Ummm… Pues a mí me parece claro.
6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?

Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = Pi\, r^2\, h$. Calculan los volúmenes: $Vx = 320 \cdot Pi$ y $Vy = 360 \cdot Pi$.

7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?
8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?
9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.

4/6

Cuestionario Tarea 2

2.1. Fijándote en las intervenciones de **D** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

No argumenta porqué no tiene interés de convencer a la otra persona. No tiene interés en persuadirla. Lo da por hecho, "es evidente".

2.2. Ahora fíjate en **E.** Respecto a lo que ha dicho **D**, ¿qué echa en falta este alumno?

Hecha en falta una argumentación

2.3. ¿Hay argumentación en lo que dice **E**? ¿Cuál? **Explica por qué es argumentación**.

No argumenta. Solo pone en duda lo que dice D y proporciona una via para estar convencido.

**5/6**

Cuestionario General

3.1. Explica si has tenido algunas dificultades al identificar argumentaciones. ¿Cuáles?

En el episodio 2, en (1). He tenido que volver a leer el enunciado para comprobar si se especificaba el objetivo ("llevar la mayor cantidad de agua") dado que no se especificaba en la pregunta

3.2. ¿Hay diferencias entre las argumentaciones que has identificado a lo largo de todo el cuestionario? ¿Cuáles?

La gran diferencia está en la tipología de las aportaciones de los alumnos para convencer a sus compañeros: numéricas, definiciones, metáforas, representaciones gráficas, ...

3.3. ¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas?

Argumentar es aportar en un diálogo unos datos, referencias, afirmaciones, ... que intenten convencer a otra persona de la veracidad o falsedad de una idea inicial.

3.4. Si deseas añadir algo más, por favor hazlo en este espacio.

6/6

## Cuestionario del profesor P2

→ ¿También es necesario ser socio para ENTRAR

Tarea 1

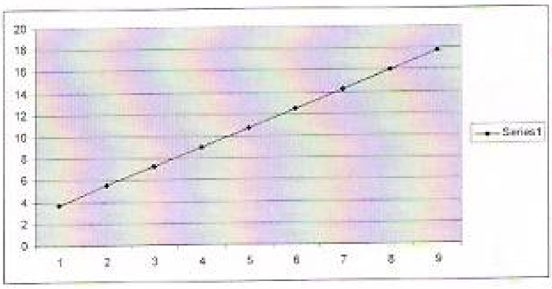
**Para comprar en un supermercado de descuento es necesario hacerse socio pagando una cuota inicial de 2€. Una persona, que necesita 4 kg de manzanas, quiere comprar por primera vez en el supermercado. 1kg de manzanas cuesta 1.75€. ¿Qué tipo de relación hay entre el peso de las manzanas y su precio?**

→ La cuota no fo parte del precio de l manzana luego, aun hay que paga no forma p de la respu

Episodio 1

1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.
2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50
3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.
4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.
5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica.

| | |
|---|---|
| 1 | 3,75 |
| 2 | 5,5 |
| 3 | 7,25 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10,75 |
| 6 | 12,5 |
| 7 | 14,25 |
| 8 | 16 |
| 9 | 17,75 |




← Aquí se relaci Kg de manzanc Y FACTURA TO no se relacionan los Kg con su prec

6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.
7 A: Sí y por eso es directamente proporcional.
8 B: Ya… No sé…
9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?
10 C: ¡Pues no gastaríamos nada!
11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…
12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!
13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.
14 C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…
15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

Cuestionario Tarea 1

1.1. Fijándote en las intervenciones de **A** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

1: Una a. es la defensa razonada de una tesis u opinión.
"porque" introduce la argumentación 1Kg → 1'75€, 2 Kg → 3'5€ ...,
según la def de dir proporcional.
3 y 7 → se apoya en la def de "dir proporcional" cuando
a incrementos iguales en la cantidad siguen incrementos iguales
en precio.

1.2. Ahora haz lo mismo con las intervenciones de **B**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

13 → si no pasa por (0,0) no se cumple la defión

15 → Recuerda la defión de "escalones" y "pasar por (0,0)"

2 → Refuta la argumentación 1A añadiendo el dato de la caída
que A ha obviado.

1.3. De nuevo haz lo mismo con las intervenciones de **C**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

4,6 → se apoya en que los peldaños son iguales

10 y 12 → defiende que la gráfica pase por (0,0)

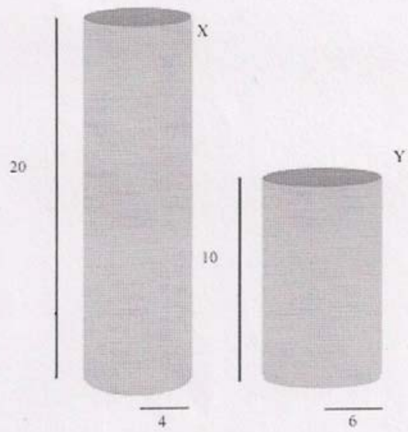
14 → si queremos rectas, ahora que pase por (0, 2), ha
cambiado de opinión

Tarea 2

**Joan va a jugar a fútbol con sus amigos y quiere llevar la mayor cantidad de agua posible. Tiene dos botellas cilíndricas, una de radio 6 y altura 10 y la otra de radio 4 y altura 20. ¿Cuál le conviene llevar?**

Episodio 2

El profesor entrega un dibujo con proporciones intencionalmente erróneas para generar mayor discusión.




1 D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.
2 P: ¿Estás seguro de que es más grande?
3 D: Se ve claramente.
4 E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?
5 D: Ummm… Pues a mí me parece claro.
6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?

Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = Pi\, r^2\, h$. Calculan los volúmenes: $Vx = 320 \cdot Pi$ y $Vy = 360 \cdot Pi$.

7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?
8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?
9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.

Cuestionario Tarea 2

2.1. Fijándote en las intervenciones de **D** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

1, 4 D: "es", "se ve" se refiere a las proporciones del dibujo en el que se aprecia + alto uno que otro y casi igual de radios

2.2. Ahora fíjate en **E.** Respecto a lo que ha dicho **D**, ¿qué echa en falta este alumno?

4 -> Una comprobación o prueba numérica, no visual.

2.3. ¿Hay argumentación en lo que dice **E**? ¿Cuál? **Explica por qué es argumentación**.

SI, porque pone en duda que D tenga "pruebas" de lo que dice, luego argumenta que es necesaria una fórmula que lo compruebe.

**5/6**

Cuestionario General

3.1. Explica si has tenido algunas dificultades al identificar argumentaciones. ¿Cuáles?

3D → "se ve claramente" no estoy seguro de que sea una argumentación ya que es más un convencimiento que un argumento o explicación para convencer a los demás, finalmente me he decantado porque sí lo es ya que el argumento es "gráfico".

3.2. ¿Hay diferencias entre las argumentaciones que has identificado a lo largo de todo el cuestionario? ¿Cuáles?

En la tarea 1 los alumnos inducen la correlación a partir de los datos, elaborando y discutiendo hipótesis. En la tarea 2 el razonamiento es más bien deductivo, una vez superada la falsa intuición sobre la relación entre los tamaños de los recipientes.

3.3. ¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas?

Defender el resultado total o parcial de un problema apoyándose en hechos considerados ciertos por haberlos dado como tales en teoría o deducirse de ellos.

3.4. Si deseas añadir algo más, por favor hazlo en este espacio.

Es un trabajo muy interesante, cuando lo presentes, si no te importa, me gustaría leerlo con atención.
albertoarnalbailen@gmail.com
Un saludo.

6/6

Cuestionario del profesor P3

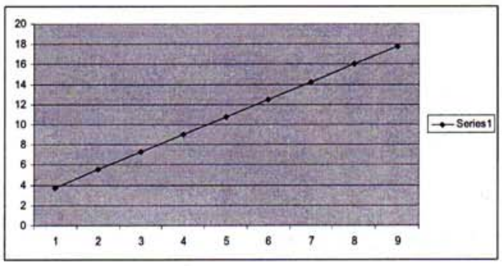
Tarea 1

**Para comprar en un supermercado de descuento es necesario hacerse socio pagando una cuota inicial de 2€. Una persona, que necesita 4 kg de manzanas, quiere comprar por primera vez en el supermercado. 1kg de manzanas cuesta 1.75€. ¿Qué tipo de relación hay entre el peso de las manzanas y su precio?**

Episodio 1

1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.
2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50
3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.
4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.
5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica.

| | |
|---|---|
| 1 | 3,75 |
| 2 | 5,5 |
| 3 | 7,25 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10,75 |
| 6 | 12,5 |
| 7 | 14,25 |
| 8 | 16 |
| 9 | 17,75 |




6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.
7 A: Sí y por eso es directamente proporcional.
8 B: Ya… No sé…
9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?
10 C: ¡Pues no gastaríamos nada!
11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…
12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!
13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.
14 C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…
15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

Cuestionario Tarea 1

1.1. Fijándote en las intervenciones de **A** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Son argumentaciones porque quiere convencer a los demás y así mismo de que la situación planteada corresponde a la definición que los tres conocen para proporcionalidad directa

1.2. Ahora haz lo mismo con las intervenciones de **B**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

He marcado como argumentaciones aquellos fragmentos donde B intenta rebatir los argumentos de A de forma razonada. En el fragmento 2 he dudado si era argumentación porque no completa el razonamiento pero lo he marcado porque después es en lo que se fundamenta para argumentar.

1.3. De nuevo haz lo mismo con las intervenciones de **C**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Son argumentaciones porque quiere convencerse y convencer a los demás de que la situación planteada corresponde a sus conocimientos sobre la proporcionalidad directa (sosteniéndose en la gráfica en el fragmento 6)

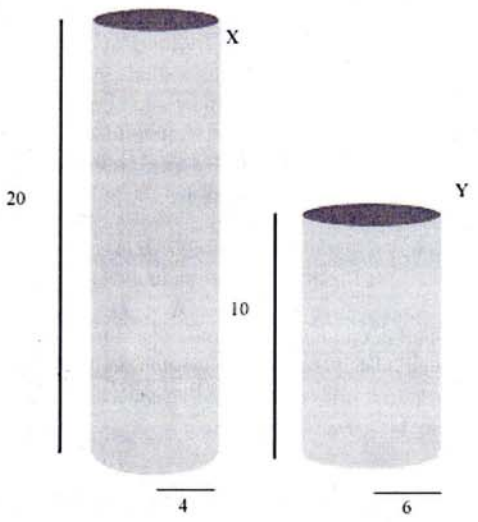
**3/6**

Tarea 2

**Joan va a jugar a fútbol con sus amigos y quiere llevar la mayor cantidad de agua posible. Tiene dos botellas cilíndricas, una de radio 6 y altura 10 y la otra de radio 4 y altura 20. ¿Cuál le conviene llevar?**

Episodio 2

El profesor entrega un dibujo con proporciones intencionalmente erróneas para generar mayor discusión.




1 D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.
2 P: ¿Estás seguro de que es más grande?
3 D: Se ve claramente.
4 E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?
5 D: Ummm… Pues a mí me parece claro.
6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?

Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = Pi\, r^2 h$. Calculan los volúmenes: $Vx = 320 \cdot Pi$ y $Vy = 360 \cdot Pi$.

7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?
8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?
9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.

4/6

Cuestionario Tarea 2

2.1. Fijándote en las intervenciones de **D** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Son argumentaciones en cuanto le permiten decidir cuál le conviene llevar a Zon y lo justifica basándose en el dibujo ante los demás participantes.

2.2. Ahora fíjate en **E.** Respecto a lo que ha dicho **D**, ¿qué echa en falta este alumno?

E echa en falta una medida objetiva para decidir cuál puede contener más agua, no se fía de la percepción visual sobre cuál es mayor, sabiendo la diferencia entre tener mayor altura y tener mayor volumen (comenta que es más ancho).

2.3. ¿Hay argumentación en lo que dice **E**? ¿Cuál? **Explica por qué es argumentación**.

Sí. Porque desvía la argumentación iniciada por D hacia una medida objetiva que sabe que le permitirá decidir cuál escoger y convencer a D sobre lo erróneo de su decisión. Permite llegar a una conclusión y además, a la visión crítica del dibujo por parte de D.

**5/6**

Cuestionario General

3.1. Explica si has tenido algunas dificultades al identificar argumentaciones. ¿Cuáles?

Me ha costado decidir, en la tarea 1, si B en 2 hace una argumentación. El fragmento en sí no está totalmente construido marcando un razonamiento y la conclusión a la que lo lleva, pero he decidido marcarlo porque es en lo que se fundamenta el razonamiento global.

3.2. ¿Hay diferencias entre las argumentaciones que has identificado a lo largo de todo el cuestionario? ¿Cuáles?

Sí, en la tarea 1 las argumentaciones se basan en un contenido aprendido (la proporcionalidad directa) y en cómo los alumnos han interiorizado esta definición y su manera de intentar enlazar la situación con su definición. En la tarea 2 se argumenta en base a la percepción (D) y en base al conocimiento de una magnitud.

3.3. ¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas?

Exponer ideas que te permitan llegar a una conclusión para la resolución de un problema/tarea y convencer a los demás que el razonamiento es acertado y efectivamente te lleva a la resolución correcta

3.4. Si deseas añadir algo más, por favor hazlo en este espacio.

6/6

## Cuestionario del profesor P4

Tarea 1

**Para comprar en un supermercado de descuento es necesario hacerse socio pagando una cuota inicial de 2€. Una persona, que necesita 4 kg de manzanas, quiere comprar por primera vez en el supermercado. 1kg de manzanas cuesta 1.75€. ¿Qué tipo de relación hay entre el peso de las manzanas y su precio?**

Episodio 1

1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.

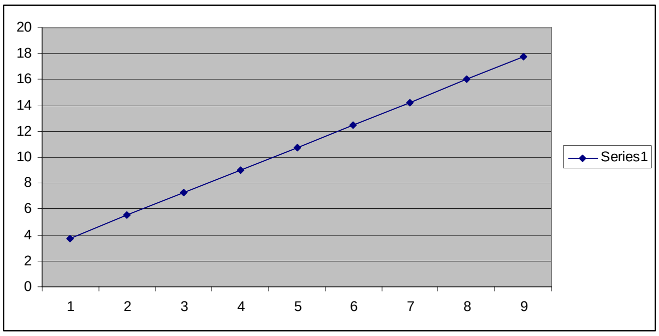
2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50

3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.

4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.

5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica.

| | |
|---|---|
| 1 | 3,75 |
| 2 | 5,5 |
| 3 | 7,25 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10,75 |
| 6 | 12,5 |
| 7 | 14,25 |
| 8 | 16 |
| 9 | 17,75 |




6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.

7 A: Sí y por eso es directamente proporcional.

8 B: Ya… No sé…

9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?

10 C: ¡Pues no gastaríamos nada!

11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…

12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!

13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.

14 C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…

15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

Cuestionario Tarea 1

1.1. Fijándote en las intervenciones de **A** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así

Para argumentar la afirmación inicial de que se trata de una variación directamente proporcional.

cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual

Precisa la argumentación anterior, ahora sin valores numéricos, para afirmar que lo que importa es que sea directamente proporcional.

1.2. Ahora haz lo mismo con las intervenciones de **B**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

hagamos tabla y gráfica

Basa su argumentación en hacer una tabla de valores y representar la gráfica correspondiente.

Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero

Estas dos observaciones le permiten afirmar que no es una relación directamente proporcional.

1.3. De nuevo haz lo mismo con las intervenciones de **C**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

es como una escalera y todos los peldaños son iguales

Para C, este es el argumento para afirmar que es una relación directamente proporcional.

Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€

Para rebatir la insistencia de B en que la recta tiene que pasar por el punto (0,0)

si ponemos el (0,2), sí que es una recta

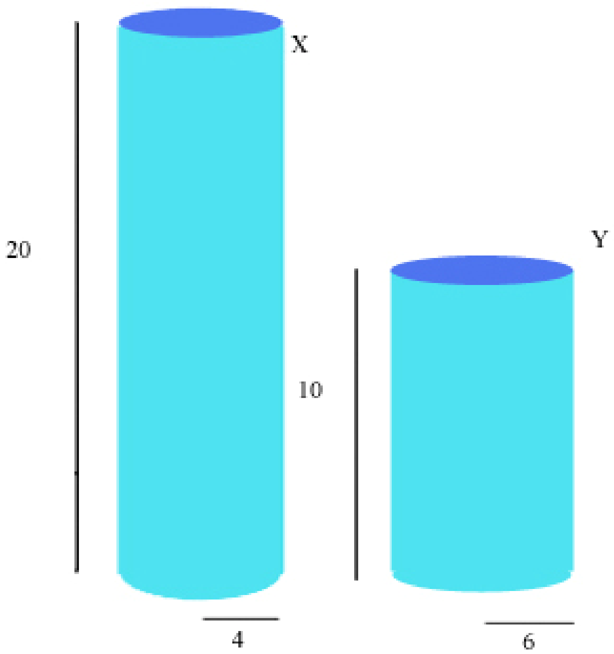
En la misma línea que lo anterior apoyándose en los argumentos de B: la tabla y la gráfica.

Tarea 2

**Joan va a jugar a fútbol con sus amigos y quiere llevar la mayor cantidad de agua posible. Tiene dos botellas cilíndricas, una de radio 6 y altura 10 y la otra de radio 4 y altura 20. ¿Cuál le conviene llevar?**

Episodio 2

El profesor entrega un dibujo con proporciones intencionalmente erróneas para generar mayor discusión.




1 D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.
2 P: ¿Estás seguro de que es más grande?
3 D: Se ve claramente.
4 E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?
5 D: Ummm… Pues a mí me parece claro.
6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?

Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = Pi\ r^2\ h$. Calculan los volúmenes: $Vx = 320 \cdot Pi$ y $Vy = 360 \cdot Pi$.

7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?
8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?
9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.

Cuestionario Tarea 2

2.1. Fijándote en las intervenciones de **D** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

es más grande y entonces le cabe más

Establece una relación entre “capacidad” y el aspecto “grande” de un objeto.

Cuando dice que “el dibujo no está bien hecho” yo creo que sólo observa pero no argumenta.

2.2. Ahora fíjate en **E.** Respecto a lo que ha dicho **D**, ¿qué echa en falta este alumno?

Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen

El volumen no puede relacionarse solamente con el aspecto que tenga un cuerpo. Hay que hacerlo con magnitudes concretas como la anchura.

2.3. ¿Hay argumentación en lo que dice **E**? ¿Cuál? **Explica por qué es argumentación**.

Habría que sacar el volumen…

A partir de la observación anterior deduce que hay que utilizar la fórmula del volumen. Creo que las dos frases conjuntamente son una argumentación. La capacidad está relacionada con el volumen, que a su vez se determina a partir de unas determinadas magnitudes con las cuales podemos utilizar una fórmula.

Cuestionario General

3.1. Explica si has tenido algunas dificultades al identificar argumentaciones. ¿Cuáles?

En el bachillerato francés que yo cursé la geometría tenía una importancia enorme y gran parte de los ejercicios que hacíamos consistían en demostrar propiedades y teoremas a partir de hipótesis. La idea que tengo de la argumentación está por tanto muy condicionada por esta formación. Que pueda haber argumentaciones en frases cortas y sencillas como "es más grande y entonces le cabe más" me resulta difícil de entender.

3.2. ¿Hay diferencias entre las argumentaciones que has identificado a lo largo de todo el cuestionario? ¿Cuáles?

Algunas se basan en valores numéricos (porque 1kg de manzanas cuesta…), otras utilizan tablas y gráficas, algunas son frases cortas que implican una observación de un hecho concreto (pero la otra es más ancha…). También hay alguna más elaborada (cada vez que una aumenta…).

3.3. ¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas?

Actualmente, conseguir que un alumno inicie un esbozo de razonamiento con el que sea capaz de avanzar en la solución de un determinado problema ya me parece un gran avance. La geometría puede ser un buen punto de partida. Los programas de geometría dinámica son una herramienta muy potente para que los alumnos sean capaces de demostrar un teorema o una propiedad. Me cuesta distinguir entre razonamiento, demostración, deducción y argumentación.

3.4. Si deseas añadir algo más, por favor hazlo en este espacio.

¡ Espero que mi contribución haya servido de algo!

Cuestionario del profesor P5

Tarea 1

**Para comprar en un supermercado de descuento es necesario hacerse socio pagando una cuota inicial de 2€. Una persona, que necesita 4 kg de manzanas, quiere comprar por primera vez en el supermercado. 1kg de manzanas cuesta 1.75€. ¿Qué tipo de relación hay entre el peso de las manzanas y su precio?**

Episodio 1

1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.

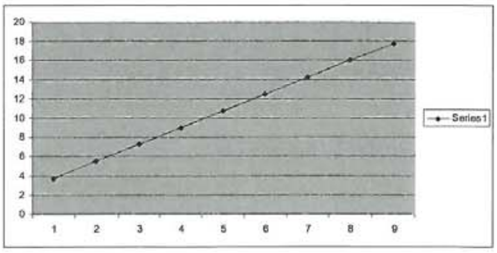
2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50

3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.

4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.

5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica.

| | |
|---|---|
| 1 | 3,75 |
| 2 | 5,5 |
| 3 | 7,25 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10,75 |
| 6 | 12,5 |
| 7 | 14,25 |
| 8 | 16 |
| 9 | 17,75 |




6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.

7 A: Sí y por eso es directamente proporcional.

8 B: Ya… No sé…

9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?

10 C: ¡Pues no gastaríamos nada!

11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…

12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!

13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.

14 C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…

15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

2/6

Cuestionario Tarea 1

1.1. Fijándote en las intervenciones de **A** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

En el primer caso, da ejemplos concretos que respaldan su idea.
En el segundo, ~~que~~ dice que el argumento dado anteriormente no es cierto, ~~porque~~ mediante una razón teórica.
En el tercero, ~~respalda~~ coge la idea anterior para respaldar su teoría.
Todas sus intervenciones son para respaldar su idea de "directamente proporcional" y son coherentes.

1.2. Ahora haz lo mismo con las intervenciones de **B**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

13. Con la gráfica y 12 da una ~~[illegible]~~ característica para que no sea "directamente proporcional"
Lo mismo en 15.
Son argumentaciones porqué respalda su idea de "directamente proporcional" con ejemplos, que no cumplen una característica necesaria para que lo sea (D.P.)

1.3. De nuevo haz lo mismo con las intervenciones de **C**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

4. Utiliza 1 con un ejemplo cotidiano para mostrar que ambas cantidades aumentan con la misma proporción.
6. Repite la misma idea
12. Justifica que si no gastas nada es porque no has comprado nada, aunque confunde entrar con comprar (en el enunciado dice que pagamos por comprar). En este caso necesita el sentido común para ahorrar (hay gente que podría entrar sin comprar nada y otra que preferiría no entrar).

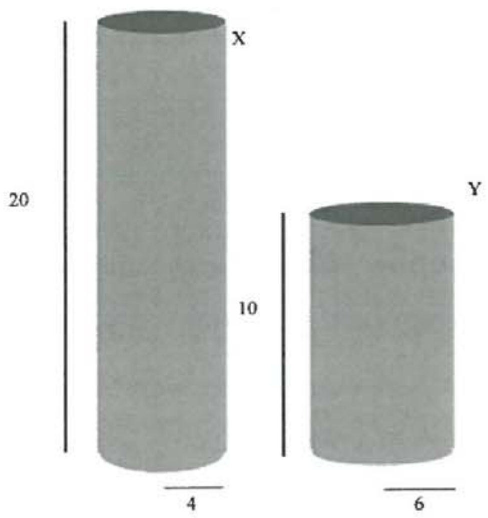
3/6 En 4 y 6 hay argumentación porqué muestra los ejemplos para respaldar su idea de D.P. (aunque no observa otra condición necesaria, que es que pase la gráfica por el (0,0))

Tarea 2

**Joan va a jugar a fútbol con sus amigos y quiere llevar la mayor cantidad de agua posible. Tiene dos botellas cilíndricas, una de radio 6 y altura 10 y la otra de radio 4 y altura 20. ¿Cuál le conviene llevar?**

Episodio 2

El profesor entrega un dibujo con proporciones intencionalmente erróneas para generar mayor discusión.




1 D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.
2 P: ¿Estás seguro de que es más grande?
3 D: Se ve claramente.
4 E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?
5 D: Ummm… Pues a mí me parece claro.
6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?

Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = Pi\, r^2 h$. Calculan los volúmenes: $Vx = 320 \cdot Pi$ y $Vy = 360 \cdot Pi$.

7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?
8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?
9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.

**4/6**

Cuestionario Tarea 2

2.1. Fijándote en las intervenciones de **D** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Porqué, aunque erróneas, responden a la pregunta, aunque no sea una argumentación correcta y aunque sea basándose en la percepción.

2.2. Ahora fíjate en **E.** Respecto a lo que ha dicho **D**, ¿qué echa en falta este alumno?

Que sea un argumento sólido, basado en el volumen exacto de cada cilindro. Por eso propone hacer el cálculo.

2.3. ¿Hay argumentación en lo que dice **E**? ¿Cuál? **Explica por qué es argumentación.**

Asume que X es más alta que Y, pero como Y es más ancha y las dos variables estan relacionadas en el volumen, eso le induce a plantearse si la afirmación de su compañero es cierta.
Por lo tanto argumenta su duda con la contraposición de tamaño de ambas medidas.

**5/6**

Cuestionario General

3.1. Explica si has tenido algunas dificultades al identificar argumentaciones. ¿Cuáles?

Que a veces se apoyaban en frases de sus compañeros, la falta de conectores y la estructura de las frases.

3.2. ¿Hay diferencias entre las argumentaciones que has identificado a lo largo de todo el cuestionario? ¿Cuáles?

Que algunas apoyaban una idea o concepto equivocado. Algunas no eran suficientemente precisas o eran incompletas (creo que deberían darse más detalles). Esto último se resuelve con la interacción.

3.3. ¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas?

Hacer referencia a otro concepto, particularizar mediante ejemplos, dar características de manera que se explique lo que se pide. Es ir dando razones hasta que lleguemos a un punto que entendamos todos, mediante diferentes recursos.

3.4. Si deseas añadir algo más, por favor hazlo en este espacio.

En las argumentaciones bien hechas, hay dos cosas importantes: que lo que se dice sea cierto y que el razonamiento sea cierto (la lógica)

6/6

# Cuestionario del profesor P6

Tarea 1
**Para comprar en un supermercado de descuento es necesario hacerse socio pagando una cuota inicial de 2€. Una persona, que necesita 4 kg de manzanas, quiere comprar por primera vez en el supermercado. 1kg de manzanas cuesta 1.75€. ¿Qué tipo de relación hay entre el peso de las manzanas y su precio?**
Episodio 1
1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.
2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50
3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.
4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.
5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica.
6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.
7 A: Sí y por eso es directamente proporcional.
8 B: Ya… No sé…
9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?
10 C: ¡Pues no gastaríamos nada!
11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…
12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!
13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.
14 C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…
15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

Cuestionario Tarea 1
1.1. Fijándote en las intervenciones de **A** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Cada vez que una variable aumenta 1 la otra aumenta 1.75 …"Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual".

Es una argumentación porque infiere una conclusión: que las dos variables son directamente proporcionales a partir del hecho (premisa) de que al aumentar 1 en una d ellas, la otra aumenta 1.75.

1.2. Ahora haz lo mismo con las intervenciones de **B**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Si no se comprara ninguna manzana, sólo gastaríamos los 2 € de la cuota… Es una argumentación porque formulando la hipótesis de no comprar manzanas, se llega a que se gastarían sólo 2€ (conclusión).

Si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional. (Argumentación: como la gràfica no es una línea recta (no se cumple la premisa), se extrae la conclusión de que no puede ser directamente proporcional. El alumno sabe que si se cumple la premisa: gràfica linea recta, se concluye que son directamente proporcionales. Argumento: como no se cumple la premisa, no se puede extraer el resultado que corresponde a dicha premisa).

En clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0) y esta no pasa. Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional. Aquí la argumentación es del mismo tipo que en el caso inmediatamente anterior: al no cumplirse la premisa "pasar por el (0,0)", no se puede concluir que "sean directamente proporcionales".

1.3. De nuevo haz lo mismo con las intervenciones de **C**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Es como una escalera y todos los peldaños son iguales, por eso es una relación directamente proporcional. Se trata de una argumentación tipo causa-consecuencia: al hacer la gráfica, es una línea recta, y los escalones son todos iguales, de donde se deriva que han de ser directamente proporcionales.

Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, mejor no entrar, así no gasto nada. Se trata de nuevo de una argumentación tipo causa-consecuencia: como entrar en el super vale 2€ aunque no se compre nada, ni no quiero gastar, mejor no entrar en el super. Se quiere "convencer" al otro.

Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta… Aquí es una argumentación en la medida que "se describe" lo que pasa: si ponemos el (0,2), sí que es una recta, para intentar inducir la conclusión: "es una recta", a partir de la constatación de que pasa por el (0,2).

Tarea 2

**Joan va a jugar a fútbol con sus amigos y quiere llevar la mayor cantidad de agua posible. Tiene dos botellas cilíndricas, una de radio 6 y altura 10 y la otra de radio 4 y altura 20. ¿Cuál le conviene llevar?**

Episodio 2

El profesor entrega un dibujo con proporciones intencionalmente erróneas para generar mayor discusión.

1 D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.
2 P: ¿Estás seguro de que es más grande?
3 D: Se ve claramente.
4 E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar

el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?
5 D: Ummm… Pues a mí me parece claro.
6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?
Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = Pi\ r^2\ h$. Calculan los volúmenes: $Vx = 320 \cdot Pi$ y $Vy = 360 \cdot Pi$.
7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?
8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?
9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.

Cuestionario Tarea 2
2.1. Fijándote en las intervenciones de **D** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

"Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más. Se ve claramente. A mí me parece claro".

Después de comprobar que Y tiene un volumen mayor que X, dice: "pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?"

Es una argumentación porque se extrae la conclusión de que el dibujo no está bien hecho, a partir de la comprobación con cálculos de que Y tiene un volumen mayor que X .

2.2. Ahora fíjate en **E.** Respecto a lo que ha dicho **D**, ¿qué echa en falta este alumno?

Calcular el volumen ya que pudiera ser que Y tuviera más volumen que Y al "ser más ancha". Este alumno echa de menos "comprobar" los volúmenes pues constata que los dibujos pueden engañarle. Es una argumentación porque necesita comprobar antes de concluir, formular cuál es mayor.

2.3. ¿Hay argumentación en lo que dice **E**? ¿Cuál? **Explica por qué es argumentación**.

Sí, que la botella Y es más ancha que X, por lo que podría darse el caso que tuviera más capacidad.

Es argumentación porque el alumno ve que el dibujo le puede estar llevando a una conclusión errónea. Es una argumentación porque formula una hipótesis: "podría darse el caso que tuviera más capacidad".

Cuestionario General
3.1. Explica si has tenido algunas dificultades al identificar argumentaciones. ¿Cuáles?

Creo que no.

3.2. ¿Hay diferencias entre las argumentaciones que has identificado a lo largo de todo el cuestionario? ¿Cuáles?

Sí, en la tarea 1 las argumentaciones se basan más en ver si se verifican o no unas premisas para poder concluir que las variables son directamente proporcionales. El alumno conoce previamente qué tiene que pasar para extraer la conclusión correspondiente. Mientras que en la tarea 2, los sentidos nos engañan y hay que comprobar antes de concluir algo. Argumentar que una botella tiene más capacidad que la otra sin comprobarlo es un razonamiento erróneo y te puede llevar a extraer conclusiones erróneas como se ha visto.

3.3. ¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas?

Dar razones fundamentadas de las conclusiones que se extraen, porque se cumplen determinadas condiciones (premisas).
Dar razones fundamentadas de que no se pueden extraer determinadas conclusiones porque no se cumplen determinadas premisas.
Dar razones fundamentadas para deducir.
Formular hipótesis diferentes y ver qué pasa, qué se puede extraer.
Ofrecer algún ejemplo (contraejemplo) que modifica las premisas y que no permite inferir las mismas conclusiones.

3.4. Si deseas añadir algo más, por favor hazlo en este espacio.

Cuestionario del profesor P7

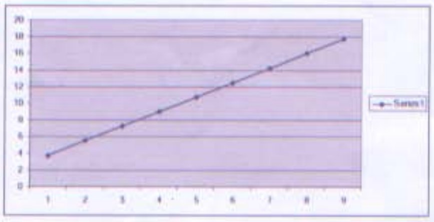
Tarea 1

**Para comprar en un supermercado de descuento es necesario hacerse socio pagando una cuota inicial de 2€. Una persona, que necesita 4 kg de manzanas, quiere comprar por primera vez en el supermercado. 1kg de manzanas cuesta 1.75€. ¿Qué tipo de relación hay entre el peso de las manzanas y su precio?**

Episodio 1

1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.
2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50
3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.
4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.
5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica.

| | |
|---|---|
| 1 | 3,75 |
| 2 | 5,5 |
| 3 | 7,25 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10,75 |
| 6 | 12,5 |
| 7 | 14,25 |
| 8 | 16 |
| 9 | 17,75 |



6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.
7 A: Sí y por eso es directamente proporcional.
8 B: Ya… No sé…
9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?
10 C: ¡Pues no gastaríamos nada!
11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…
12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!
13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.
14 C: Pero si ponemos el (0,2) sí que es una recta…
15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

2/6

Cuestionario Tarea 1

1.1. Fijándote en las intervenciones de A identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por què son argumentaciones**.

· En 1, A expone una relación entre dos variables y la relaciona con la definición de proporcionalidad directa
· En 3, A resalta la idea básica de proporcionalidad directa
· En 7, A recoge la idea expresada por C en 6 como argumento de lo que ha defendido en 3

1.2. Ahora haz lo mismo con las intervenciones de **B**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

· En 13, B introduce el punto (0,0) en la gráfica de 5B para argumentar que la línea recta no sería tal
· En 15, B utiliza el punto (0,0) como necesario dado que se fijó en clase

1.3. De nuevo haz lo mismo con las intervenciones de **C**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

· En 4, C utiliza una comparación
· En 6, C relaciona la gráfica comentada con su comparación
· En 14 C se da cuenta de que partiendo del punto (0,2) se mantiene la forma de línea recta

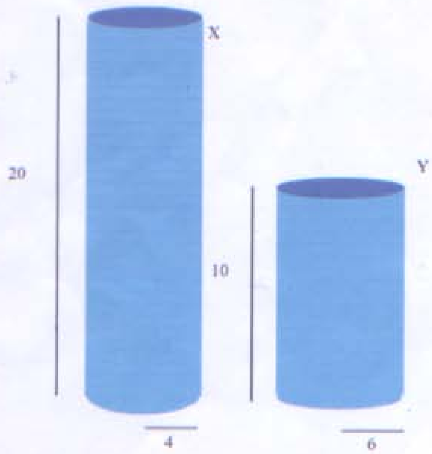
Todas estas intervenciones van dirigidas a defender el punto de vista sostenido por cada alumno/a. Cada uno/a intenta convencer a los demás dando alguna razón que refuerce su idea.

Tarea 2

**Joan va a jugar a fútbol con sus amigos y quiere llevar la mayor cantidad de agua posible. Tiene dos botellas cilíndricas, una de radio 6 y altura 10 y la otra de radio 4 y altura 20. ¿Cuál le conviene llevar?**

Episodio 2

El profesor entrega un dibujo con proporciones intencionalmente erróneas para generar mayor discusión.




1 D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.
2 P: ¿Estás seguro de que es más grande?
3 D: Se ve claramente.
4 E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?
5 D: Ummm… Pues a mí me parece claro.
6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?

Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = Pi\, r^2 h$. Calculan los volúmenes: $Vx = 320{\cdot}Pi$ y $Vy = 360{\cdot}Pi$.

7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?
8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?
9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.

4/6

Cuestionario Tarea 2

2.1. Fijándote en las intervenciones de **D** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones.**

Creo que D sólo argumenta en 1 basándose en una apreciación (altura) que luego resultará errónea ("porque es más grande")

2.2. Ahora fíjate en **E**. Respecto a lo que ha dicho **D**, ¿qué echa en falta este alumno?

En 4, E se da cuenta de que hay dos variables en juego y cree que hay que hacer un cálculo para determinar la influencia de las dos a la vez

2.3. ¿Hay argumentación en lo que dice E? ¿Cuál? **Explica por qué es argumentación.**

"Pero la otra es más ancha (...) Habría que sacar el volumen", E se da cuenta de que varían altura y radio y no tiene claro cómo van a afectar al volumen estas variaciones, por eso dice "habría que sacar el volumen"

**5/6**

Cuestionario General

3.1. Explica si has tenido algunas dificultades al identificar argumentaciones. ¿Cuáles?

~~Caso que D~~ ; He intentado identificar qué parte de las intervenciones aportaba información que reforzara la idea defendida por los alumnos y luego me fijo en las palabras que para mí señalan argumentación en el sentido de relacionar ideas (cada vez, por lo tanto, es como etc)

3.2. ¿Hay diferencias entre las argumentaciones que has identificado a lo largo de todo el cuestionario? ¿Cuáles?

causa-consecuencia (Ep 1 1A, 6C-7A; 13B, 14C, 15B)
comparación (Ep 1: 4C)
razón (1D)
verificar una hipótesis 4E

3.3. ¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas?

Ofrecer a los demás interlocutores algún elemento (cálculo, gráfico, comparación, causa-consecuencia, que refuerce lo que se afirma

3.4. Si deseas añadir algo más, por favor hazlo en este espacio.

6/6

# Cuestionario del profesor P8

Episodio 1

1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.

2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50

3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.

4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.

5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica.

| | |
|---|---|
| 1 | 3,75 |
| 2 | 5,5 |
| 3 | 7,25 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10,75 |
| 6 | 12,5 |
| 7 | 14,25 |
| 8 | 16 |
| 9 | 17,75 |

6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.

7 A: Sí y por eso es directamente proporcional.

8 B: Ya… No sé…

9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?

10 C: ¡Pues no gastaríamos nada!

11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…

12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!

13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.

14 C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…

15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

Cuestionario Tarea 1

1.1. Fijándote en las intervenciones de **A** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

1A.- Es una argumentación porque reconoce una relación entre variables, la identifica con un concepto que conoce y de ello hace una deducción aunque sea incorrecta.

3A es una insistencia sobre el argumento sobre el que se basa para reconocer la proporcionalidad directa.

7A.- A partir de lo que aporta C hace su afirmación

2.1.-

13B.- hace una afirmación justificandola en sus conocimientos sobre lo que es la proporcionalidad directa

15B por la misma razón. Niega que haya relación de proporcionalidad directa en base a sus conocimientos.

3.1

4C Afirma que es una relación de proporcionalidad directa porque se basa en la forma y para este estudiante este argumento le es suficiente aunque no tenga razón.

Questionario 2

1 D: <u>Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.</u>
2 P: ¿Estás seguro de que es más grande?
3 D: Se ve claramente.
4 E: <u>Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen</u>. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?
5 D: Ummm… Pues a mí me parece claro.
6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?

Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = Pi\ r^2\ h$. Calculan los volúmenes: $Vx = 320 \cdot Pi$ y $Vy = 360 \cdot Pi$.

7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?
8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?
9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.

2.1

2.1. Fijándote en las intervenciones de **D** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Hace una afirmación basandose en una observación visual.

2.2. Ahora fíjate en **E.** Respecto a lo que ha dicho **D**, ¿qué echa en falta este alumno?
la comprobación aplicando la fórmula para calcular el volumen del cilindro.
2.3. ¿Hay argumentación en lo que dice **E**? ¿Cuál? **Explica por qué es argumentación**.

es argumentación porque hace una afirmación basandose en la observación de que es más ancha.

Cuestionario General

3.1. Explica si has tenido algunas dificultades al identificar argumentaciones. ¿Cuáles?

Al principio sí para clarificar la idea de lo que es una argumentación.

3.2. ¿Hay diferencias entre las argumentaciones que has identificado a lo largo de todo el cuestionario? ¿Cuáles?

En el episodio 1 las argumentaciones se basan en el reconocimiento de unas relaciones que ha de saber. Ha de tener claro el concepto de la relación de proporcionalidad directa.

En 4c también ha de saber el concepto pero muestra que esta relación la asocia con la representación gràfica de la escalera.

Al final se basan en la observación del gràfico de la función que ha de pasar por (0,0). puede que este alumnno no sepa nada sobre el significado de la proporcionalidad directa, simplemente recuerda una imagen que asocia con la idea de la proporcionalidad directa. Estas son dos tipos de argumentaciones diferentes.

es decir los argumentos primeros son más sólidos que los que se dan en el parrafo anterior.(15B)

En el segundo cuestionario las argumentaciones basadas en la simple observación del gràfico son poco sostenibles, son flojas, mientras que la argumentación que se basa en los cálculos són más convincentes.

Cuando E reconoce que és más ancha muestra un nivel de argumentación más reflexiva haciéndose un representación de la situación no basada únicamente en el gráfico sino interpretando la información que en él aparece.

3.3. ¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas?

Hacer afirmaciones que se basan en argumentos. Estos pueden ser de diferentes niveles de reflexión i de validez. Por niveles de reflexión me refiero a lo que ha aparecido antes. Por validez me refiero a una idea, que creo es de J Mason, según a quien convence con el argumento. Si solo le convence a quien lo hace es flojo y se tendrá que mejorar, si además convence a sus amigos y quienes confian en él ya está mejor pero se tendrá que mejorar. En cambio si convence a todos , incluido el profesor/a, será válido. En la clase de matemáticas los alumnos aprenden a argumentar, siguiendo un proceso que puede empezar convenciendo solamente a quien lo hace pero ha de acabar convenciendo a todos.

## Cuestionario del profesor P9

1.1. *A* responde a la pregunta del enunciado: “es una relación de proporcionalidad directa”. Y hace una argumentación basada en una concepción errónea de la función de proporcionalidad directa (f. lineal): primero, no considerando la cuota inicial para calcular el precio en función del peso, y, después (interv. 3), evidenciando esa confusión cuando dice: “para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual”. Este argumento pone de manifiesto sus deficiencias a la hora de diferenciar las funciones lineales y afines. También en la intervención 7 ahonda en esas deficiencias asociando únicamente la línea recta con la f. lineal. Por tanto, lo que hace A es argumentar. Y en sus argumentos hay un cierto progreso, ya que en cada intervención aporta algún elemento nuevo: en la 1, argumento numérico, en la 3, evidencia el aumento de las dos variables y en la 7, relaciona la f. lineal con una recta. Pero es una argumentación falaz porque se basa en conceptos y apreciaciones matemáticas erróneas. También sus aportaciones son de poca relevancia porque, aún recordándoselo B en la interv. 2, ignora la cuota inicial.

1.2. La argumentación de B es coherente, progresiva y basada (o se genera a partir de) en la refutación de que el modelo matemático que representa la tarea propuesta no es una función de proporcionalidad directa, defendido por B y C, sino el de una función afín (aunque este nombre no aparezca en el episodio). Sus intervenciones más relevantes son la 2, en la inicia el proceso (aporta datos numéricos), la 5, que es un argumento numérico y gráfico importante, y en la 15 en la que refuta definitivamente los argumentos de B y C, basándose en la definición o en las propiedades de la función lineal: “para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0)”.

1.3. Los argumentos de C son similares a los de A. Tienen una base errónea al considerar la función resultante como lineal. En la interv. 4, introduce la frase “los peldaños son iguales” o “las escaleras son iguales” (que interpreto que quiere decir que siempre tiene la misma pendiente, es decir, si el número de kg se va incrementando en unidades el precio se incrementa siempre en la misma cantidad, y como siempre han incrementado los kg en una unidad los puntos sobre la gráfica están separados una misma distancia en la línea recta). Y en la interv. 6 hace referencia a la línea recta como representativa única de una función lineal. Por otra parte, responde de forma coherente (interv. 10 y 12) a la pregunta de P (intev. 9), que a mi me parece sin mucho sentido, porque el enunciado dice: “Una persona, que NECESITA 4 kg de manzanas, QUIERE comprar por primera vez en el supermecado”. Y digo que las respuestas a esa pregunta son coherentes porque es una situación real y el modelo matemático que ajustamos a esa situación en el caso límite del (0, 2) no se cumple: lo normal es que una persona no se haga socia si no va a comprar nada.

2.1. D establece una conjetura: “Le conviene llevar la X porque es más grande...” (interv. 1), que argumenta sólo de forma visual.
Por tanto, el único argumento que aporta D es el basado en una apreciación visual errónea de los dibujos que sólo la aportación de E en la interv. 4 (ni siquiera la interv.3 de P) le hace rectificar. Por tanto, es una argumentación (si se quiere llamar así) muy pobre en todos los sentidos.

2.2. No se fía de la apreciación visual de D, echa en falta un argumento más sólido que él mismo aporta (interv. 4).

2.3. En este apartado diferenciaré cuatro elementos que me parecen relevantes:

- E no se fía de la visualización, porque dice: “la otra es más ancha” (interv. 4).
- E establece una conjetura: “podría ser que tuviera más volumen” (interv. 4).
- En la intervención 4, E introduce el argumento del cálculo del volumen. Así, hay un intento de iniciar una argumentación que luego se consolida, sobre todo después de la intervención 6 de P. Por tanto, en lo que se refiere a esta aportación, que es la única de E, la podemos considerar como coherente con la tarea propuesta, de un contenido matemático medio (porque parece que no acaba de saberse la fórmula), hay un progreso significativo en el discurso, etc.
- Desde mi punto de vista, la interv. 6 de P inclina definitivamente el camino de la discusión hacia la utilización de la fórmula del volumen. Por tanto estropea lo que podía haber sido una discusión más abierta de confrontación entre la aportación de argumentos visuales (en este caso erróneos) y algebraicos. Mis alumnos en una situación similar (según los niveles) comparan lo que varía la potencia cuadrado (del radio) con la potencia uno de la altura. O doblan folios para comparar volúmenes, etc.

3.1. Bueno, la dificultad que conlleva identificar e interpretar lo que dicen (o quieren decir) los alumnos y las concepciones matemáticas válidas o erróneas que hay detrás de lo que dicen o interpreto que dicen.

3.2. Hay una diferencia esencial:

- Construcción de argumentos basados en concepciones matemáticas erróneas y, por tanto, que conducen a conclusiones falsas. Por ejemplo, en el episodio 1, la confusión entre función lineal y afín, y en el episodio 2, la importancia que el alumno D da a la representación gráfica de los recipientes.
- Aportación de argumentos válidos que orientan correctamente la resolución de las tareas, como es el caso de los alumnos B (episodio 1) y E (episodio 2).

3.3. Daré una explicación general de lo que entiendo por argumentar, pero hemos de ser conscientes de que la valoración de una argumentación depende del nivel de académico de los alumnos que la desarrollen. Una argumentación puede ser excelente si la hace un alumno de primero de ESO y esa misma puede ser insuficiente si la desarrolla un alumno de bachillerato. Por tanto, según mi criterio, la escala para valorar las argumentaciones depende del nivel de conocimiento de los alumnos.
Dicho eso, para mi, los procesos: explicar, argumentar y demostrar (o probar) se encuentran situados en un continuo (en el que es difícil de identificar los límites entre unos y otros) que va desde la explicación como simple descripción de hechos,

hasta la demostración matemática (o prueba abstracta, formal y teórica) en la que los argumentos se organizan en una cadena deductiva sin relación alguna con la manipulación de ejemplos. Estos dos extremos abarcan el proceso de argumentar, entendido como aportación de razones para sostener o contradecir una idea.
Ahora bien, la argumentación, según mi criterio, tiene diferentes niveles:

- En la banda alta (junto a la demostración), situaría el razonamiento, entendido como aportación de argumentos, enunciados, ideas, etc. a partir de las cuales se vayan generando otros argumentos, … (similar a la construcción de los silogismos) hasta llegar a lo que pretendemos (es decir, ha de ser visible una cadena deductiva, que todavía no está formalizada).
- Para situar el discurso de los alumnos en la banda media y baja del proceso de argumentar, haría falta un análisis del mismo que contemplara los siguientes elementos en los contenidos de las intervenciones:

  Si son más o menos coherentes con el objetivo que se pretende alcanzar
  Si son más o menos relevantes
  Si se observa o no un progreso en las aportaciones
  Qué genera esas aportaciones
  Si hay una lógica matemática en las aportaciones que se hacen
  El grado de generalidad de los contenidos de las aportaciones, etc.

(bueno, los elementos de esta relación no pretenden ser exhaustivos, y seguro que unos se solapan con otros, necesitaría una reflexión mucho más profunda para ordenarlos y completarlos, y eso supongo que es misión del investigador).

3.4.

Me parecen correctas las tareas y los episodios, a pesar de lo cual pienso que es posible que estas dos ideas hubieran facilitado los análisis (o tal vez no):
a) Según mi criterio, en el episodio 2 el profesor interviene demasiado y de manera decisiva.
b) No sé el nivel concreto de los alumnos, y sé, aunque con poca precisión, los objetivos de la investigación, pero posiblemente se hubiera facilitado el análisis que hacemos los profesores que intervenimos en la investigación si se hubieran combinado las tareas numéricas (tarea 1 y 2) propuestas, con alguna no numérica, por ejemplo proponer la tarea de doblar un folio siguiendo la base o la altura y comparar los volúmenes de los cilindros obtenidos.

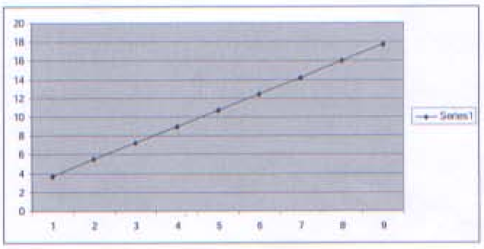
Tarea 1

**Para comprar en un supermercado de descuento es necesario hacerse socio pagando una cuota inicial de 2€. Una persona, que necesita 4 kg de manzanas, quiere comprar por primera vez en el supermercado. 1kg de manzanas cuesta 1.75€. ¿Qué tipo de relación hay entre el peso de las manzanas y su precio?**

Episodio 1

1 A: Es una variación directamente proporcional. Porque 1 kg de manzanas cuesta 1.75€, 2 kg 3.50, 4 kg 7€ y así. Cada vez que esta variable aumenta 1 esta otra aumenta 1.75. Es la definición de directamente proporcional. Por lo tanto es una relación directamente proporcional.
2 B: Sí, pero hay que pagar la cuota, así que 1 kg cuesta 3,75€ y 2 kg 5,50
3 A: ¿Y eso qué? Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual.
4 C: Sí, es como una escalera y todos los peldaños son iguales. Así que es una relación directamente proporcional.
5 B: Espera, hagamos tabla y gráfica.

| | |
|---|---|
| 1 | 3,75 |
| 2 | 5,5 |
| 3 | 7,25 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10,75 |
| 6 | 12,5 |
| 7 | 14,25 |
| 8 | 16 |
| 9 | 17,75 |




6 C: ¿Ves? Es una línea recta, y los escalones son todos iguales.
7 A: Sí y por eso es directamente proporcional.
8 B: Ya… No sé…
9 P: ¿Qué pasaría si no compraran ninguna manzana?
10 C: ¡Pues no gastaríamos nada!
11 B: Bueno, sólo los 2 € de la cuota…
12 C: Si no quiero comprar y entrar en el supermercado cuesta 2€, ¡mejor no entro!
13 B: Ves, si ponemos el (0,0) ni siquiera es una línea recta, así que no puede ser una relación directamente proporcional.
14 C: Pero si ponemos el (0,2), sí que es una recta…
15 B: No, pero en clase vimos que para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0). Los escalones deben ser todos iguales y debe pasar por el cero. Eso era directamente proporcional.

**2/6**

Cuestionario Tarea 1

1.1. Fijándote en las intervenciones de **A** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Yo veo que son argumentaciones porque parte de una proposición que considera cierta y formula una serie de "razones" (argumentos) a favor de ésta, con la intención de modificar el pensamiento de su compañero, de persuadirlo, de influenciarlo a través de sus argumentos para que admita como válida la proposición.

1.2. Ahora haz lo mismo con las intervenciones de **B**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

En este caso, veo que son argumentaciones porque el alumno B formula una serie de "razones" (argumentos) que van en contra de la proposición que el alumno A toma como válida. La intención, igual que antes, influir de esta manera en el pensamiento de su compañero para modificarlo y que acabe aceptando que su proposición no es válida.

1.3. De nuevo haz lo mismo con las intervenciones de **C**. Identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

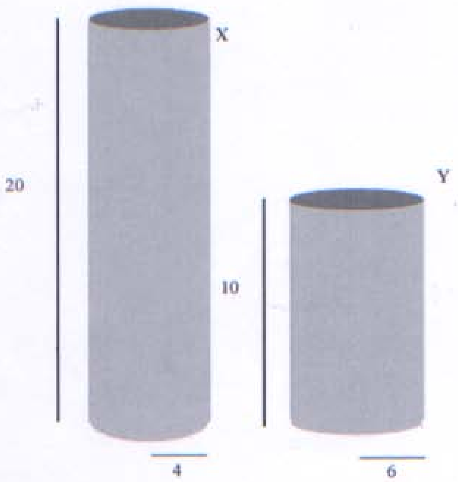
La intención, igual que en los casos anteriores, es intentar influir en el pensamiento de los demás, intentando modificarlo para que acabe aceptando la proposición inicial (la que formula el alumno A) como válida y para ello utiliza argumentos comparativos o ejemplificaciones (toma la gráfica como ejemplo)

Tarea 2

**Joan va a jugar a fútbol con sus amigos y quiere llevar la mayor cantidad de agua posible. Tiene dos botellas cilíndricas, una de radio 6 y altura 10 y la otra de radio 4 y altura 20. ¿Cuál le conviene llevar?**

Episodio 2

El profesor entrega un dibujo con proporciones intencionalmente erróneas para generar mayor discusión.




1 D: Le conviene llevar la X porque es más grande y entonces le cabe más.
2 P: ¿Estás seguro de que es más grande?
3 D: Se ve claramente.
4 E: Pero la otra es más ancha. Podría ser que tuviera más volumen. Habría que sacar el volumen. Pi por dos erre… ¿Cómo era?
5 D: Ummm… Pues a mí me parece claro.
6 P: ¿Quién recuerda la fórmula para obtener el volumen de un cilindro?

Los alumnos acuerdan que el volumen de un cilindro se obtiene mediante la ecuación $V = Pi\, r^2\, h$. Calculan los volúmenes: $Vx = 320 \cdot Pi$ y $Vy = 360 \cdot Pi$.

7 P: Entonces le conviene llevar el Y. ¿Estáis de acuerdo?
8 D: Sí, pero entonces el dibujo no está bien hecho. ¿No?
9 P: Tienes razón. De hecho lo hice a propósito.

4/6

Cuestionario Tarea 2

2.1. Fijándote en las intervenciones de **D** identifica argumentaciones, subráyalas y, a continuación, **explica por qué son argumentaciones**.

Creo que son argumentaciones porque intenta convencer con "razones" (argumentos) a los demás. Como hemos dicho antes, influir en su pensamiento para que acaben aceptando su proposición como válida llega a una conclusión que refuerza su proposición, a partir de unos hechos concretos (observación de los dos dibujos que ha proporcionado el profesor

2.2. Ahora fíjate en **E.** Respecto a lo que ha dicho **D**, ¿qué echa en falta este alumno?

Encuentra débil el argumento de D pq éste sólo tiene en cuenta la altura de las botellas como variable que determina el volumen que cabe dentro de ellas, y él sabe que además de la altura también influye la anchura del recipiente

2.3. ¿Hay argumentación en lo que dice **E**? ¿Cuál? **Explica por qué es argumentación**.

El alumno E formula "razones" (argumentos) que cuestionan la proposición que D considera válida. Su objetivo también es influir en el pensamiento de los demás con argumentos, pero en este caso no busca ratificar una proposición en concreto, sino que cuestiona, pone en duda la que formula su compañero con el objetivo de llegar a una conclusión.

5/6

Cuestionario General

3.1. Explica si has tenido algunas dificultades al identificar argumentaciones. ¿Cuáles?

No demasiado (creo), pero quizás confundo argumentación con justificación; no sé muy bien dónde está la diferencia entre ambos conceptos. Pienso que argumentas siempre que intentas influir en el pensamiento de los demás, persuadirlos de alguna manera. En cambio, cuando justificas sólo buscas reforzar tu opinión.

3.2. ¿Hay diferencias entre las argumentaciones que has identificado a lo largo de todo el cuestionario? ¿Cuáles?

Sí. Algunos argumentos buscan ratificar una proposición inicial, otros refutarla y otros, simplemente, cuestionarla. Además, se usan diferentes tipos de argumentos: silogismos, ejemplos, comparaciones, etc.

3.3. ¿Qué es para ti argumentar en clase de matemáticas?

Intentar influir en el pensamiento de alguien formulando "razones" (argumentos) con el objetivo de persuadirlo para que acepte como válida tu proposición o, al menos, se llegue a cuestionar la validez de la suya. Como argumentos puedes usar silogismos, ejemplos, comparaciones, metáforas...

3.4. Si deseas añadir algo más, por favor hazlo en este espacio.

6/6

# Análisis de los cuestionarios individuales

## Análisis del cuestionario de P2

### Análisis de la *caracterización* de P2

Defender el resultado total o parcial de un problema apoyándose en hechos considerados ciertos por haberlos dado como tales en teoría o deducirse de ellos [*sic*].

La caracterización de P2 se centra en "defender el resultado total o parcial de un problema". Esta caracterización restringe los datos admisibles (los denomina "hechos") a aquellos que se inscriben en una teoría. No podemos elucidar si se refiere con ellos al conocimiento matemático estructurado o a algo más amplio. Aún así, considerando el nivel de la enseñanza al que nos referimos, nos inclinamos a pensar que se refiere a conocimientos semi-estructurados, matemáticamente significativos, que se adscriben explícita o implícitamente al conocimiento compartido en el aula de matemáticas y que funcionan para construir ”conocimiento matemático”. Es decir, pensamos la mención de "la teoría" como mención del corpus de referencia matemático.

La adscripción de los datos a una teoría así como el valor lógico que se les otorga, *a priori* o como consecuencia de un razonamiento deductivo, sugieren que para P2 la argumentación en el aula de matemáticas está condicionada por procedimientos vinculados a la demostración. Este profesor obvia el contenido semántico de los hipotéticos datos en favor de su estatus teorético-operacional que otorga, *a priori*, un valor epistémico positivo (necesario en la teoría) a los datos. Por otra parte, P2 utiliza la palabra "defender" y no "demostrar", por lo cual se aparta de la demostración cuando habla de argumentación.

P2 contextualiza su caracterización asociando la argumentación a la resolución de problemas. Consideramos que su proximidad con procesos asociados con la actividad demostrativa dan cuenta también de esta contextualización.

El hecho de que P2 se refiera a *defender* sugiere que piensa la argumentación como actividad dirigida, sobre todo, a otra persona (o que se inscribe en el marco de una actividad colectiva) y lo asociamos con la función argumentativa de convencer a otros.

Es destacable que al inicio del cuestionario, sin que se le demande, P2 expresa una primera caracterización de la argumentación, que consignamos en el apartado *análisis de las explicaciones de P2*.

**Análisis de la *distinción* de P2**

> En la tarea 1 los alumnos inducen la relación a partir de los datos, elaborando y discutiendo hipótesis. En la tarea 2 el razonamiento es más bien deductivo, una vez superada la falsa intuición sobre la relación entre los tamaños de los recipientes.

Más allá del error al decir que los alumnos "inducen la relación" (el proceso es deductivo: a partir de una definición general se pretende mostrar que la relación es o no es directamente proporcional), P2 destaca los razonamientos deductivo e inductivo como complementarios y constituyentes del marco de la argumentación.

Este profesor se refiere a la percepción de las dimensiones de los cilindros como "falsa intuición" cuando sabemos, a partir del texto del episodio, que las dimensiones eran deliberadamente tales para producir esta percepción. Nos parece una afirmación condicionada por el contrato didáctico.

**Análisis de la *reflexión* de P2**

> 'Se ve claramente' no estoy seguro de que sea una argumentación ya que es más un convencimiento que un argumento o explicación para convencer a los demás, finalmente me he decantado porque sí lo es y que el argumento es 'gráfico'.

Aquí, P2 utiliza las palabras "argumento" y "explicación" de modo complementario. No tenemos modo de saber cuál es, para P2, la diferencia entre estos conceptos a partir de este párrafo.

Con "argumento gráfico", P2 se refiere al registro semiótico de representación de los datos; de modo que consideramos que reconoce el registro visual como fuente válida de datos en esta ocasión (no pretendemos decir que los datos sean válidos dentro del marco de la tarea). Por lo tanto, para P2, este registro de representación (aunque no podamos determinarlo con precisión) pertenece al corpus de referencia.

Resulta interesante el uso de la palabra "convencimiento" en opocisión a "argumento" y "explicación". Consideramos que P2 se refiere a que en una argumentación se intenta modificar/establecer el valor epistémico de la tesis a través de argumentos. Por lo tanto, una tesis con valor determinado *a priori*, con aparente arbitrariedad (es decir, que no está supeditado al de los datos, garantías, etc.) no puede ser parte de una argumentación. Sin embargo, P2 parece reconocer que es el debate implícito sobre la pertinencia del registro visual el que pretende comunicar validez a la tesis.

**Análisis de las *explicaciones* de P2**

Una argumentación es la defensa razonada de una tesis u opinión.

En el enunciado anterior, P2 proporciona una caracterización de la argumentación como antecedente de sus explicaciones. Resulta significativo que sea el único participante que considera proporcionar una caracterización de la argumentación como condición inicial para sus explicaciones, siendo ésta la primera parte del cuestionario. En esta caracterización no vemos todos los elementos que aparecerán en el apartado correspondiente del cuestionario, en particular los que relacionamos al valor teorético-funcional de los elementos de la argumentación. Su referencia a la argumentación, en esta ocasión, es más general. En concreto, la contextualización de esta caracterización está dada implícitamente por las situaciones planteadas en las tareas y no es una demanda deliberada como en el apartado *caracterización*. Por otra parte, destacamos que se repite la idea de "defender" como noción central.

P2 recurre a las intervenciones individuales como unidad de análisis y suele explicar por qué son argumentaciones prescindiendo de contenidos de otras intervenciones. Sus explicaciones son, en este sentido, autónomas: destaca los elementos que le parecen más significativos y los consigna como justificación sin vincularlos explícitamente con posibles precedentes en intervenciones previas. En ocasiones un grupo de intervenciones quedan ligadas por recurrir a datos comunes (T1 (4) y T1 (6)), garantías comunes (T1 (3) y T1 (7)) o tesis comunes (T1 (10) y T1 (12)). Estas parejas tienen una explicación común.

**T1 (6)** "Se apoya en que los peldaños son iguales". [Única e idéntica explicación que para (4)]

**T1 (7)** "Se apoya en la definición de "directamente proporcional" cuando a incrementos iguales en la cantidad siguen incrementos iguales en precio". [Única e idéntica explicación que para (3)]

**T1 (12)** "Defiende que la gráfica pasa por (0,0)". [Única e idéntica explicación que para (10)]

P2 destaca distintos elementos de las intervenciones, probablemente porque le resultan más significativos dentro de lo que identifica como argumentación. A pesar de que desde nuestra perspectiva T1 (3, 4, 6, 7) son reformulaciones de T1 (1) (un razonamiento similar sería aplicable a T1 (10) y T1 (12)), P2 las identifica como argumentaciones destacando elementos comunes: reconociendo que estas intervenciones son reformulaciones de otras anteriores. Así tenemos que para P2 la reformulación es una práctica argumentativa en este contexto.

P2 es narrativo en sus explicaciones, suele "contar" lo que sucede recurriendo a aspectos semánticos de las intervenciones (esto se observa en las explicaciones ya citadas) e incluso haciendo interpretaciones personales o parafraseos que clarifican el contenido semántico:

> **T1 (13)** "Si no pasa por (0,0) no cumple la definición".
>
> **T1 (14)** "Si queremos recta, ahora que pase por (0,2), (ha cambiado de opinión)".

Sus explicaciones no consignan criterios generales discernibles que justifiquen sus identificaciones. En ocasiones utiliza los verbos *defender, rebatir* y *apoyarse* de modo acorde con su caracterización y coherente con la tarea solicitada en el cuestionario. Sin embargo, en otras ocasiones consigna reflexiones aisladas que no responden de manera satisfactoria a esta tarea. Las dos citas precedentes son ejemplos representativos de esto. Consideramos que esto se debe a la complejidad inherente a la tarea: explicar por qué un dado discurso es una argumentación no es una tarea sencilla. Otros ejemplos en este sentido son:

> **T1 (3)** "'es', 'se ve' se refiere a las proporciones del dibujo en el que se aprecia más alto uno que otro y casi igual de radio". [Única e idéntica explicación que para (1)]
>
> **T1 (15)** "Recuerda la definición de "escalones" y "pasar por (0,0)".

P2 reconoce *aportar datos para apoyar una tesis* como una función importante de la argumentación. Observamos este código en al mayoría de sus explicaciones. En menor medida, P2 considera *aportar garantías* como función argumentativa. También considera *rebatir* como una función de la argumentación.

Aunque pueda suponerse que la idea de *convencer a otros* y *convencerse a uno mismo* está implícitamente presente en muchas de las explicaciones de P2, es notorio que no se hace mención explícita de estas funciones argumentativas.

Por último, señalamos que P2 subraya usualmente conectivos y datos, de donde podemos inferir que este profesor considera éstos como elementos significativos para reconocer la práctica de argumentación.

## Análisis del cuestionario de P3

### Análisis de la *caracterización* de P3

Exponer ideas que te permitan llegar a una conclusión para la resolución de un problema/tarea y convencer a los demás que el razonamiento es acertado y efectivamente te lleva a la resolución correcta.

El foco de la *caracterización* de P3 está en "llegar a una conclusión" y "convencer a los demás". Su caracterización es fuertemente contextual pues la inscribe en el marco de resolución de problemas y considera como objetivo del proceso el llegar a "la resolución correcta" del problema. Por otra parte, P3 considera la argumentación como una actividad primordialmente colectiva cuya finalidad es convencer a otros.

Su referencia a "ideas" no admite la adscripción de éstas a un corpus particular de referencia o a un constructo teórico definido. Esto sugiere que P3 considera las nociones provenientes del corpus de referencia compartido como parte de la argumentación en este contexto.

Reconocemos elementos estructurales (en el sentido de Toulmin) cuando este profesor se refiere a "ideas que te permitan llegar a una conclusión"; como para el caso de P1, asociamos estas ideas con los *datos, garantías* y *conclusiones* toulminianos, aunque los vínculos funcionales entre estos elementos no quedan del todo claros en el párrafo.

P3 desvincula las funciones argumentativas *convencer a otros* y *aportar datos para apoyar una tesis*; es decir, no supedita la primera a la segunda, lo que sugiere que no considera solamente el razonamiento deductivo (donde el convencimiento proviene de la relación funcional entre los elementos y el valor epistémico de las premisas) como actividad argumentativa en este nivel.

### Análisis de la *distinción* de P3

> Sí, en la tarea 1 las argumentaciones se basan en un contenido aprendido (la proporcionalidad directa) y en cómo los alumnos han interiorizado esta definición y su manera de intentar enlazar la situación con su definición. En la tarea 2 se argumenta en base a la percepción (D) y en base al conocimiento de una magnitud.

P3 funda su distinción en el origen de los conocimientos implicados: en su adscripción al corpus de referencia matemático, cuando escribe sobre el primer episodio, y extramatemático, cuando escribe sobre el segundo. A pesar de ello, cuando menciona el "conocimiento de una magnitud" no podemos estar seguros del origen que le otorga.

Para P3 el origen de los datos (y de los elementos implicados) es suficientemente importante como para que distingan una argumentación de otra. Es decir: las referencias matemáticas y extramatemáticas constituyen constructos separables y separados, discernibles en el marco de las prácticas argumentativas del aula. La distinción es fuertemente contextual al fundamentarse en la naturaleza matemática/extramatemática de los datos y garantías utilizados. Para P3 resulta importante distinguir según aspectos epistemológicos de los conocimientos implicados.

> **Análisis de la *reflexión* de P3**
>
> Me ha costado decidir, en la tarea 1, si B en (2) hace una argumentación. El fragmento en sí no está totalmente construido marcando un razonamiento y la conclusión a la que lo lleva, pero he decidido marcarlo porque es en lo que se fundamenta el razonamiento global.

Aunque no los distingue con claridad, P3 hace referencia a los elementos de la argumentación y los distingue como “marca” para su identificación. Esto sugiere que para P3 es más fácil reconocer argumentación cuando los elementos son explícitos.

Este profesor reconoce la *#continuidad en el discurso* diciendo que es en esta intervención en lo que se funda el "razonamiento global". Esto resulta interesante pues P3 procura distinguir elementos estructurales *a la Toulmin* para identificar argumentaciones y por otro lado resalta, a pesar de la ausencia de estos elementos, la información aportada en la intervención T1 (2) para conformar las subsiguientes intervenciones, considerando esto un motivo “suficiente” para la identificación.

> **Análisis de las *explicaciones* de P3**
>
> **T1 (1, 3, 7)** “Son argumentaciones porque quiere convencer a los demás y a sí mismo de que la situación planteada corresponde a la definición que los tres conocen para

proporcionalidad directa". [En un único párrafo se refiere a todas las argumentaciones de A que identifica]

**T1 (4, 6, 14)** "Son argumentaciones porque quiere convencerse y convencer a los demás de que la situación planteada corresponde a sus conocimientos sobre la proporcionalidad directa (sosteniéndose en la gráfica en el fragmento 6)". [En un único párrafo se refiere a todas las argumentaciones de C que identifica]

Las explicaciones de P3 giran usualmente en torno a las funciones argumentativas *#convencer a otro* y *#convencerse a uno mismo*, idea que está presente en su *caracterización*. Este profesor también hace hincapié en la idea de *#establecer una tesis* y *#aportar datos para apoyar una tesis*:

**T1 (2, 13, 15)** "He marcado como argumentaciones aquellos fragmentos donde B intenta rebatir los argumentos de A de forma razonada". [En un único párrafo se refiere a todas las argumentaciones de B que identifica]

**T2 (1, 3)** "Son argumentaciones en cuanto le permiten decidir cuál le conviene llevar a Joan y lo justifica basándose en el dibujo ante los demás participantes". [En un único párrafo se refiere a todas las argumentaciones de B que identifica]

Estos son los elementos que utiliza recurrentemente para identificar argumentaciones. En cambio, las explicaciones que da para T1 (2) y T2 (4) son de otra índole:

**T1 (2)** "En el fragmento 2 he dudado si era argumentación porque no completa el razonamiento pero lo he marcado porque después es en lo que se fundamenta para argumentar".

**T2 (4)** "Sí. Porque desvía la argumentación iniciada por D hacia una medida objetiva que sabe que le permitirá decidir cuál escoger y convencer a D sobre lo erróneo de su decisión. Permite llegar a una conclusión y, además, a la visión crítica del dibujo por parte de D".

En estos casos, P3 destaca el "valor" de las aportaciones, describiendo su rol en el devenir de la discusión general. En el primer caso considera la consignación de los datos que a la postre justificarán la conclusión "correcta". En el segundo caso hace una consideración de orden epistemológico acerca del aporte de la intervención; vemos esto como un reconocimiento implícito de los distintos estatus y de las posibles tensiones entre los corpus de referencia matemático y extramatemático en el aula.

Para P3, las emisiones precedentes conforman el contenido y determinan la interpretación de cada intervención; de modo que P3 considera la #*continuidad en el discurso*. Esto se evidencia en:

> **T1 (1, 3, 7)** "Son argumentaciones porque quiere convencer a los demás y a sí mismo de que la situación planteada corresponde a la definición que los tres conocen para proporcionalidad directa". [En un único párrafo se refiere a todas las argumentaciones de A que identifica]

En este caso, la definición de *proporcionalidad directa* es un elemento que se mantiene y amplifica a lo largo de las intervenciones de A. Se destacan, además, los datos emitidos como fundamento para futuras intervenciones.

> **T1 (2, 13, 15)** "He marcado como argumentaciones aquellos fragmentos donde B intenta rebatir los argumentos de A de forma razonada. En el fragmento 2 he dudado si era argumentación porque no completa el razonamiento pero lo he marcado porque después es en lo que se fundamenta para argumentar". [En un único párrafo se refiere a todas las argumentaciones de B que identifica]

Como en otros cuestionarios, las explicaciones de P3 son narrativas. Este profesor "cuenta" lo que sucede en las intervenciones destacando las funciones argumentativas que lo llevan a identificarlas como argumentaciones, así como los elementos estructurales que le resultan significativos (véanse las explicaciones ya citadas).

Coherentemente con su identificación basada en *funciones argumentativas*, P3 identifica T1 (3, 4, 6, 7) a pesar de que sean reformulaciones de T1 (1). La intención de convencer y convencerse es una constante en todas ellas. No podemos explicar desde esta perspectiva que no identifique T1 (10, 11, 12), donde la intención de convencer y el aporte de datos son también claros. Para P3 la #*reformulación* de los datos (y, en general, de los elementos de una argumentación) es parte de las prácticas argumentativas del aula.

## Análisis del cuestionario de P4

### Análisis de la *caracterización* de P4

> Actualmente, conseguir que un alumno inicie un esbozo de razonamiento con el que sea capaz de avanzar en la solución de un determinado problema ya me parece un gran avance. La geometría puede ser un buen punto de partida. Los programas de

> geometría dinámica son una herramienta muy potente para que los alumnos sean capaces de demostrar un teorema o una propiedad. Me cuesta distinguir entre razonamiento, demostración, deducción y argumentación.

Resulta difícil interpretar por qué P4 responde de este modo a la pregunta planteada. Podemos suponer que se debe a la cuestión que comenta al final, "Me cuesta distinguir entre razonamiento, demostración, deducción y argumentación", por lo que "evita" la pregunta comentando algunas inquietudes y percepciones. Esto refuerza la idea de la línea difusa que separa argumentación de explicación y de demostración, así como la complejidad de abordar la argumentación de forma explícita.

Aunque no podemos ver la respuesta anterior como caracterización de la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria, podemos analizar elementos presentes. El foco de esta reflexión se encuentra en “esbozar un razonamiento para avanzar en la solución de un determinado problema” y en “demostrar un teorema o propiedad”; éstas parecen ser las funciones que P4 vincula a la argumentación. A partir de lo escrito no podemos saber qué supone para P4 demostrar un teorema o propiedad, es decir, si se refiere a prácticas asociadas a la actividad demostrativa o a un ejercicio deductivo. Así, no podemos inferir qué tipo de funciones argumentativas están involucradas en esta idea o cuáles son los vínculos entre elementos implicados. Aunque “esbozar un razonamiento” sugiere la búsqueda de relaciones causales para justificar una aserción, no disponemos de datos para sostener esta interpretación.

Por otra parte, la reflexión de P4 es fuertemente contextual, pues se refiere explícita y concretamente al aula de matemáticas, a la resolución de problemas, y a otros entornos específicos de práctica. Por ello, pensamos que P4 entiende la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria como una actividad determinada por este contexto.

> **Análisis de la *distinción* de P4**
>
> Algunas se basan en valores numéricos (porque 1kg de manzanas cuesta…), otras utilizan tablas y gráficas, algunas son frases cortas que implican una observación de un hecho concreto (pero la otra es más ancha…). También hay alguna más elaborada (cada vez que una aumenta…).

Para P4 la diferencia esencial entre las argumentaciones que identifica radica en la "naturaleza" de los datos. Distingue según el registro semiótico de representación (es interesante notar que la información que consignan los dos primeros grupos de datos, numéricos y tablas y gráficas, es la misma salvo por el registro: son reformulaciones). Menciona, como otra posibilidad, la "observación de un hecho concreto", lo que sugiere que distingue entre datos que consignan contenidos matemáticos y no-matemáticos, o cuyo contenido matemático no es evidente. Por último se refiere a “alguna más elaborada” ejemplificando esta idea con una relación entre variables que, según nuestro análisis (ver documento control de las características en el anexo 1), funciona como dato en una intervención. Aunque no haya elementos suficientes para saber a qué se refiere con “más elaborada”, hace patente que las argumentaciones se pueden distinguir a partir de cualidades de los datos implicados.

**Análisis de la *reflexión* de P4**

> En el bachillerato francés que yo cursé la geometría tenía una importancia enorme y gran parte de los ejercicios que hacíamos consistían en demostrar propiedades y teoremas a partir de hipótesis. La idea que tengo de la argumentación está por tanto muy condicionada por esta formación. Que pueda haber argumentaciones en frases cortas y sencillas como “es más grande y entonces le cabe más” me resulta difícil de entender.

P4 responde, una vez más, de manera indirecta a la pregunta planteada. Asocia la argumentación con la demostración "formal" justificándose a partir de su formación académica; aunque más que una idea con la que comulgue, sugiere que sus interpretaciones están condicionadas por esta formación y que, por lo tanto, le cuesta reconocer argumentaciones que diverjan. Cuando dice "que pueda haber argumentaciones en frases cortas y sencillas como ‘es más grande y entonces le cabe más’ me resulta difícil de entender", parece indicar que una argumentación debe tener "ciertas partes" reconocibles (lo asociamos con los elementos del modelo de Toulmin) y es en virtud de la evidencia de estas partes que el discurso deviene argumentativo. En general, P4 plantea como problemática para reconocer argumentaciones la ausencia (en el sentido de ser explícitos) de estos elementos, aunque deja lugar a la posibilidad de argumentaciones sin la presencia explícita de estos elementos.

Si consideramos éste item y su *caracterización* a la vez, notamos que para P4 la argumentación en el aula de matemáticas debe acercarse a los esquemas de la demostración formal, o, al menos, tener ésta como ideal. El modo en que este profesor se expresa parece reconocerlo aunque sugiere, al mismo tiempo, que cabe la posibilidad de una concepción “distinta” al respecto.

Sugerimos que para llevar a cabo la tarea de identificar argumentaciones, la estrategia fundamental de P4 pasa por buscar elementos estructurales a la Toulmin que aparenten acomodarse en un esquema deductivo en las intervenciones.

**Análisis de las *explicaciones* de P4**

**T1 (1)** "Para argumentar la afirmación inicial de que se trata de una variación directamente proporcional".

**T1 (3)** "Precisa la argumentación anterior, ahora sin valores numéricos, para afirmar que lo que importa es que sea directamente proporcional [*sic*]".

**T1 (4)** "Para C, este es el argumento para afirmar que es una relación directamente proporcional".

P4 considera cada intervención como unidad de análisis. Subraya sistemáticamente los datos y destaca su función dentro de la intervención estableciendo un vínculo funcional con las conclusiones (o con los elementos que como tales podrían funcionar). Además, resulta interesante que a la demanda "explica por qué son argumentaciones" responda indirectamente destacando y subrayando los datos y estableciendo vínculos funcionales entre éstos y las (posibles) conclusiones. Las explicaciones apenas citadas ejemplifican este hecho. Otros ejemplos son:

**T1 (12)** "Para rebatir la insistencia de B en que la recta tiene que pasar por el punto (0,0)".

**T1 (14)** "En la misma línea que lo anterior apoyándose en los argumentos de B: la tabla y la gráfica".

Debido a este proceder la función argumentativa que queda destacada más habitualmente es la de *#aportar datos para apoyar una tesis*. Por otra parte, en diversas ocasiones resulta ambiguo y exhibe falta de coherencia entre sus respuestas y la demada explícita de explicación; las explicaciones para T1 (3, 5, 14) citadas ejemplifican esto. En otras ocasiones, P4 usa los conceptos no definidos *argumentar* o *argumento* o *argumentación* minando el significado de sus frases. Los siguientes son ejemplos en este sentido:

**T1 (1)** "Para argumentar la afirmación inicial de que se trata de una variación directamente proporcional".

**T1 (4)** " Para C, este es el argumento para afirmar que es una relación directamente proporcional".

> **T1 (5)** “Basa su argumentación en hacer una tabla de valores y representar la gráfica correspondiente”.

Se trata de otro profesor con respuestas fuertemente narrativas. Cuenta lo que sucede en los episodios destacando usualmente los datos y poniendo de manifiesto la relación funcional de éstos con las conclusiones. Las explicaciones citadas dan cuenta de esto.

Aunque P4 identifica T1 (3, 4) como argumentaciones no identifica T1 (6), donde C reitera lo dicho en T1 (4) a partir del cambio de registro, ni T1 (7), que se basa en reformulaciones y reitera la tesis sostenida. Posiblemente ve estas dos últimas intervenciones como reiteraciones y no ve la reiteración como práctica argumentativa.

Consideramos que la respuesta de P4 a T2 (4R) está claramente en sintonía con cláusulas habituales del contrato didáctico:

> **T1 (4R)** “El volumen no puede relacionarse solamente con el aspecto que tenga un cuerpo. Hay que hacerlo con magnitudes concretas como la anchura”.

P4 suele elaborar sus explicaciones a partir de los elementos consignados en la intervención a la que se refiere, considerando sólo ocacionalmente los antecedentes consignados en intervenciones previas. También destaca procesos de fundación semántica como parte de la práctica argumentativa:

> **T1 (3)** “Precisa la argumentación anterior, ahora sin valores numéricos, para afirmar que lo que importa es que sea directamente proporcional [*sic*]”.
> **T1 (4)** “Para C, este es el argumento para afirmar que es una relación directamente proporcional”.
> **T1 (15)** “Estas dos observaciones le permiten afirmar que no es una relación directamente proporcional”.

En estas explicaciones reconoce el valor de los procesos de fundación semántica del contenido como componentes de la argumentación, destacándolos como elementos de la argumentación que identifica. No explicita *#convencerse a uno mismo* o *#convencer a otros* como funciones argumentativas. Esto parece en línea con la cercanía entre argumentar y demostrar: el valor epistémico es secundario, lo importante es establecer un esquema deductivo.

P4 destaca sistemáticamente los datos de las intervenciones y raramente las garantías. Su explicación para reconocer T2 (1) es interesante:

> **T2 (1)** “Establece una relación entre “capacidad” y el aspecto “grande” de un objeto”.

Vinculamos este enunciado con la función de la explicación #*conectar hechos/conceptos de maera coherente en un sistema*. Aunque más adelante, se destaque "El volumen no puede relacionarse solamente con el aspecto que tenga un cuerpo. Hay que hacerlo con magnitudes concretas como la anchura", como argumentación. Aunque para P4 esta relación no está "bien fundada", considera que tiene cabida dentro de la práctica argumentativa. Esto está en línea con el foco de su caracterización: avanzar en la solución de un problema. Aunque para P4 parece ser la demostración formal el paradigma argumentativo, parece considerar procesos y prácticas distintas como parte de las prácticas argumentativas.

## Análisis del cuestionario de P5

> **Análisis de la *caracterización* de P5**
> Hacer referencia a otro concepto, particularizar mediante ejemplos, dar características de manera que se explique lo que se pide. Es ir dando razones hasta que lleguemos a un punto que entendamos todos, mediante diferentes recursos.

La *caracterización* de P5 es sumamente ambigua. Las nociones “otro concepto”, “dar características” o “diferentes recursos” se prestan a diversas interpretaciones y su desambiguación resulta, necesariamente, especulativa. El foco reside en "explicar lo que se pide", aunque a esta actividad añade otras como componentes de las prácticas argumentativas, de donde interpretamos que para P5 argumentar, en este contexto, es una actividad compleja que requiere e implica “diferentes recursos”.

Aunque sea difícil de interpretar, consideramos que con “hacer referencia a otro concepto” P5 se refiere a poner en relación aquello *que debe ser explicado* dentro de una argumentación con *conceptos ya establecidos*; de modo que queda de manifiesto el rol funcional (que no podemos distinguir) entre partes de una argumentación.

Cuando P5 escribe "dar características de manera que se explique lo que se pide", parece referirse a # *aportar datos para apoyar una tesis* y #*aportar garantías*, aunque es imposible desambiguar la cuestión. Por otro lado, "ir dando razones hasta que lleguemos a un punto que entendamos todos" interpretamos que se refiere, o es cercano, a las funciones argumentativas #*convencer a otros* y #*convencerse a uno mismo*, aunque, otra vez, la frase es ambigua; en particular no sabemos cuál es la naturaleza de estas *razones*.

La caracterización de este profesor no consigna elementos contextuales destacables, pero inscribe la práctica argumentativa en la esfera de lo colectivo diciendo "hasta que lleguemos a un punto que entendamos todos".

**Análisis de la *distinción* de P5**

> Que algunas apoyaban una idea o concepto equivocado. Algunas no eran suficientemente precisas o eran incompletas (creo que deberían darse más detalles).
> Esto último se resuelve con la interacción.

Suponemos que con la primera frase, P5 se refiere al valor lógico (verdadero - falso) de los datos aportados. Este acento en el valor lógico sugiere cercanía con la demostración, donde el valor lógico positivo de las premisas es una condición indispensable en el proceso. Esta idea se ve reforzada por su segunda frase, donde recalca la necesidad de *precisión* y *completitud* en la argumentación. Para P5, estas dos características parecen ser elementos identificativos de la argumentación. Su última frase resulta interesante: bajo la óptica de la función argumentativa #*convencer a otros*, sugiere que es a partir de una necesidad comunicativa que la argumentación requiere *precisión* y *completitud*.

**Análisis de la *reflexión* de P5**

> Que a veces se apoyaban en frases de sus compañeros, la falta de conectores y la estructura de las frases.

La *reflexión* de P5 considera aspectos estructurales de la argumentación (en el sentido de Toulmin). Destaca (y por lo tanto reconoce) la complicación que reviste "rastrear" los antecedentes de una argumentación en intervenciones previas no siempre de un mismo individuo. Considera los "conectores" (entendemos conectivos en general, sin poder aclarar si son argumentativos, organizativos o combinatorios) como "marcas" de la argumentación, es decir, como elementos que la evidencian. Finalmente se refiere explícitamente a la "estructura de las frases"; esto es, ve ciertas estructuras como características de discursos argumentativos y la ausencia de éstas, que no quiere decir necesariamente ausencia de argumentación, complica las identificaciones.

**Análisis de la *ampliación* de P5**

En las argumentaciones bien hechas, hay dos cosas importantes: que lo que se dice sea cierto y que el razonamiento sea cierto (la lógica).

Reforzando lo escrito en la *distinción*, P5 enfatiza el valor lógico de datos y garantías y sugiere que es una condición para una argumentación "bien hecha". Interpretamos "razonamiento cierto" como razonamiento deductivo, a partir del cual el valor lógico *verdadero* se transmite de las premisas a la conclusión. Esto, una vez más, acerca su interpretación al ideal de formalismo de la demostración matemática. Asociamos la idea de "ser cierto" con el estatus operacional, donde el valor epistémico es positivo a priori por adecuación a la teoría y el razonamiento (deductivo) proporciona el valor lógico *verdadero* y el valor epistémico *necesario* a las conclusiones.

**Análisis de las *explicaciones* de P5**

**T1 (7)** "(…) En el tercero, coge la idea anterior para respaldar su teoría.

Todas sus intervenciones son para respaldar su idea de "directamente proporcional" y son coherentes". [Este párrafo se refiere a todas las intervenciones de A] [Única e idéntica explicación que para (1)]

**T1 (4)** "Utiliza (1) con un ejemplo cotidiano para mostrar que ambas cantidades aumentan con la misma proporción.

En (4) y (6) hay argumentación porque muestra los ejemplos para respaldar su idea de D.P. (aunque no observa otra condición necesaria, que es que pase la gráfica por el (0,0))".

P5 considera cada intervención como unidad de análisis. Suele subrayar los datos presentes, o los elementos que como tales podrían funcionar, enfocando en éstos su explicaciones. Aunque este profesor considera cada intervención como unidad de análisis, hace múltiples y constantes referencias a elementos de otras intervenciones como antecedentes. Por lo tanto reconoce la *#continuidad en el discurso*:

**T1 (13)** "Con la gráfica y 12 da una característica para que no sea "directamente proporcional".

Lo mismo en 15.

Son argumentaciones porque respalda su idea de "directamente proporcional" con ejemplos, que no cumplen una característica necesaria para que lo sea (D. P.)".

**T2 (1)** "Porque, aunque erróneas, responden a la pregunta, aunque no sea una argumentación correcta y aunque sea basándose en la percepción".

El caso de P5 es paradigmático en relación con el código #*continuidad en el discurso* pues reconoce datos y garantías como antecedentes de las argumentaciones, asocia intervenciones a partir de *funciones argumentativas* e intenciones comunes e incluso menciona la coherencia como un rasgo del vínculo entre distintas intervenciones.

Consideramos las explicaciones acerca de T2 (1, 3) y T2 (4R) como condicionadas por el contrato didáctico:

> **T2 (1)** "Porque, aunque erróneas, responden a la pregunta, aunque no sea una argumentación correcta y aunque sea basándose en la percepción.
> **T2 (4R)** "Que sea un argumento sólido, basado en el volumen exacto de cada cilindro. Por eso propone hacer el cálculo.

Es interesante que P5 tilde de "no correcta" las argumentaciones T2 (1, 3). Suponemos que se refiere, en sintonía con su *ampliación* y *distinción*, a lo que considera datos falsos. Además hace una consideración negativa sobre la información que proporcionan los sentidos en este caso.

Sus explicaciones se basan en *funciones argumentativas* y no mencionan consistentemente aspectos estructurales a la Toulmin, a pesar de que menciona estos aspectos en su *reflexión* y *distinción*, destacándolos como marcas y características importantes de la argumentación. Las explicaciones ya citadas ejemplifican esto.

De nuevo estamos ante un profesor con respuestas que denotan un perfil narrativo. Cuenta lo que sucede en las intervenciones poniendo de relieve las funciones argumentativas implicadas y destacando, usualmente, los datos involucrados. Las explicaciones ya citadas ejemplifican esto.

Además, P5 identifica T1 (1, 3, 4, 6, 7) como argumentaciones. Parece claro que para este profesor, estas intervenciones son reformulaciones y parece considerar esto como componente de las prácticas argumentativas del aula.

> **T1 (3)** "(…) En el segundo [se refiere a (3)], dice que el argumento dado anteriormente no es cierto, mediante una razón teórica.
> Todas sus intervenciones son para respaldar su idea de "directamente proporcional" y son coherentes". [Este párrafo se refiere a todas las intervenciones de A]

> **T1 (4)** “Utiliza (1) con un ejemplo cotidiano para mostrar que ambas cantidades aumentan con la misma proporción.
> En (4) y (6) hay argumentación porque muestra los ejemplos para respaldar su idea de D.P. (aunque no observa otra condición necesaria, que es que pase la gráfica por el (0,0))”.
> **T1 (6)** “Repite la misma idea [que en (4)]”.
> **T1 (7)** “(…) En el tercero, coge la idea anterior para respaldar su teoría”.

P5 comenta en su explicación para T1 (6) que C "repite la misma idea" y en la explicación para T1 (7) que el alumno “coge la idea anterior para respaldar su teoría”. Es claro que para P5 *reformular*, incluso siendo reiterativo, es una actividad argumentativa. Por otra parte, aunque de manera aislada, hace mención a la *pertinencia* de los argumentos cuando escribe, en relación con las intervenciones de A, “todas sus intervenciones son para respaldar su idea de ‘directamente proporcional’ y son coherentes." y a la *fuerza* cuando menciona, para T2 (4R), "que sea un argumento sólido, basado en el volumen exacto de cada cilindro. Por eso propone hacer el cálculo." Resulta significativo que mencione la *coherencia* como característica del discurso argumentativo considerando el conjunto de intervenciones de un mismo participante. Parece referirse a los aspectos semánticos de las intervenciones y a la necesidad de solapamiento entre los campos semánticos implicados para la elaboración de un discurso argumentativo. Es igualmente significativo que se refiera a "argumento sólido" vinculando esta noción con el valor epistémico positivo de un dato; valor que queda determinado en el contexto de la resolución del problema. Estas ideas de P5 son un reconocimiento explícito de estas dos cualidades de los argumentos.

P5 reconoce la necesidad de fundación semántica y su adscripción a las prácticas argumentativas del aula cuando para T1 (4) dice:

> **T1 (4)** “Utiliza (1) con un ejemplo cotidiano para mostrar que ambas cantidades aumentan con la misma proporción.
> En (4) y (6) hay argumentación porque muestra los ejemplos para respaldar su idea de D.P. (aunque no observa otra condición necesaria, que es que pase la gráfica por el (0,0))”.

Para P5 proporcionar un “ejemplo cotidiano” (una metáfora/analogía, en este caso) a fin de ilustrar contenidos matemáticos, es una actividad que pertenece a las prácticas argumentativas del aula.

## Análisis del cuestionario de P7 (hacia un perfil de P7)

### Análisis de la *caracterización* de P7

Ofrecer a los demás interlocutores algún elemento (cálculo, gráfica, comparación, causa consecuencia) que refuerce lo que se afirma.

La caracterización de P7 es bastante laxa, no ofrece mayores aclaraciones acerca de lo que llama “elementos” ni acerca de “lo que se afirma”. En cuanto a los primeros, y viendo los ejemplos, los asociamos con los *datos* y *garantías* de Toulmin, destacando que algunos apuntan a contenidos matemáticos y otros son más generales; se refiere a datos/garantías que suelen ser emergentes, es decir, que se construyen a posteriori en, por ejemplo, la resolución de un problema (cálculo, gráfica); se refiere también a datos/garantías no necesariamente asociables con las matemáticas (comparaciones) y a datos/garantías que asociamos con prácticas habituales del aula (causa consecuencia). Asociamos la segunda noción con la *tesis* de Toulmin.

P7 se centra en la idea de "reforzar lo que se afirma", que asociamos con las *funciones argumentativas #aportar datos para apoyar una tesis* y *#aportar garantías*. Resulta significativo que se refiera a “reforzar”, lo cual, consideramos, aleja su *caracterización* de la *demostración*. Por otra parte, los “elementos” que ejemplifica aportan el sentido contextual a su *caracterización*, pues los reconocemos como habituales en el contexto del aula de matemáticas de secundaria. Finalmente, considera la argumentación como parte de una actividad colectiva, dirigida a otros.

### Análisis de la *distinción* de P7

Causa-consecuencia (Ep. 1: 1A; 6C-7A; 13B, 14C, 15B)
Comparación (Ep. 1: 4C)
Razón (1D)
Verificar una hipótesis (4E)

P7 proporciona un "catálogo" de actividades vinculadas a la práctica argumentativa: establecer causalidad, formular comparaciones (metáforas), proponer razones, verificar hipótesis. Aunque no las definie con claridad, nos permiten entender que para P7 argumentar es una actividad compleja que implica recursos variados. Además, este profesor cataloga todas las intervenciones que identifica, salvo T1(3) mediante una de estas *etiquetas*, y aunque esto sugiere mutua exclusión, no podemos estar seguros de que esta sea su intención. Por ejemplo, se refiere a T1 (6) y a T1 (7) conjuntamente, catalogándolas como "argumentación tipo causa consecuencia". Consideramos que esto es un reconocimiento por parte de P7 de la *#continuidad en el discurso*. Resulta significativo que en las intervenciones que define como "causa consecuencia" las conclusiones (o aparentes conclusiones) son explícitas (salvo 15B) y hay una fuerte presencia de conectivos.

**Análisis de la *reflexión* de P7**

He intentado identificar qué parte de las intervenciones aportaba información que reforzara la idea defendida por los alumnos y luego me fijo en las palabras que para mí señalan argumentación en el sentido de seleccionar ideas (cada vez, por lo tanto, es como, etc.).

Al preguntársele si ha tenido dificultades a la hora de identificar argumentaciones, P7 responde describiendo lo que ha hecho utilizando el verbo "intentar". Esto sugiere que considera que la tarea solicitada es compleja. Su reflexión hace hincapié en aspectos estructurales de las intervenciones. Considera los datos y, posiblemente, las garantías, distinguiéndolos a partir de su vínculo funcional con las tesis esgrimidas: " identificar qué parte de las intervenciones aportaba información que reforzara la idea defendida". Esto refuerza la posición que asume en la *caracterización* basada en las *funciones argumentativas #aportar datos para apoyar una tesis* y *#aportar garantías*. Por otra parte, considera "ciertas palabras" presentes en las intervenciones como marcas de argumentación. Es interesante que, aunque no sea el único profesor que lo destaque, proponga la identificación sistemática de palabras para identificar argumentaciones. No queda clara la naturaleza de las *palabras-marca* viendo sus ejemplos: “cada vez” y “por lo tanto” podrían funcionar como conectivos combinatorios; es menos claro el rol de “es como”, que en los episodios sirve para presentar comparaciones/metáforas.

**Análisis de las *explicaciones* de P7**

**T1 (1)** “En (1), A expone una relación entre dos variables y la relaciona con la definición de proporcionalidad directa”.

**T1 (3)** “En (3), A resalta la idea básica de proporcionalidad directa”.

**T1 (4)** “En (4), C utiliza una comparación”.

**T1 (6)** “En (6), C relaciona la gráfica comentada con su comparación en (4)”

**T2 (4)** “Pero la otra es más ancha (…) habría que sacar el volumen”, E se da cuenta de que varían altura y radio y no tiene claro cómo van a afectar al volumen estas variaciones, por eso dice “habría que sacar el volumen”.

P7 ve cada intervención como unidad de análisis. De nuevo, se trata de un profesor sumamente narrativo, que "cuenta" lo que sucede en las intervenciones destacando aspectos que considera importantes y que justifican sus identificaciones. Destaca los datos y garantías, o los elementos que como tales podrían funcionar, narrando el modo en que éstos "aparecen" en el episodio, como se ve en los datos más arriba. En cambio, relega las funciones argumentativas por las que se proporcionan estos datos y garantías a un único párrafo referido a todas sus identificaciones: "Todas estas intervenciones van dirigidas a defender el punto de vista sostenido por cada alumno/a. Cada uno/a intenta convencer a los demás dando alguna razón que refuerce su idea". Para P7, son los datos aportados los elementos más destacables en una argumentación al identificarlas dentro de los episodios. Este punto de vista queda reforzado por su *reflexión*. Sin embargo, es a partir de las funciones argumentativas *#aportar datos para apoyar una tesis*, *#aportar garantías* y *#convencer a otros* que las intervenciones de los individuos se articulan con una finalidad determinada. De modo que P7 reconoce elementos de intervenciones anteriores como antecedentes y conformadores del discurso; un ejemplo en este sentido es:

> **T1 (7)** "En (7), A recoge la idea expresada por C en (6) como argumento de lo que ha defendido en (3)".

De modo que P7 reconoce la *#continuidad en el discurso* dentro de sus explicaciones. Por otra parte, las explicaciones que da para T2 (1, 4) resultan inadecuadas a la tarea demandada:

> **T2 (1) "**Creo que D sólo argumenta en (1) basándose en una apreciación (altura) que luego resultará incorrecta ('porque es más grande')".
> **T2 (4)** "'Pero la otra es más ancha (…) habría que sacar el volumen', E se da cuenta de que varían altura y radio y no tiene claro cómo van a afectar al volumen estas variaciones, por eso dice 'habría que sacar el volumen'".

En la primera utiliza el verbo argumentar de manera cíclica, por lo que no resulta explicativa. En la segunda narra lo que sucede sin atacar con claridad la demanda de explicación. Consideramos que esto refleja la complejidad de la tarea solicitada. Por último, destacamos que identifica T1 (1, 3, 4, 6, 7) y reconoce las reformulaciones emitidas como tales. Para P7 reformular los datos es una actividad argumentativa.

## Análisis del cuestionario de P9

### Análisis de la *caracterización* de P9

-Daré una explicación general de lo que entiendo por argumentar, pero hemos de ser conscientes de que la valoración de una argumentación depende del nivel de [*sic*] académico de los alumnos que la desarrollen. Una argumentación puede ser excelente si la hace un alumno de primero de ESO y esa misma puede ser insuficiente si la desarrolla un alumno de bachillerato. Por tanto, según mi criterio, la escala para valorar las argumentaciones depende del nivel de conocimiento de los alumnos.

-Dicho eso, para mi, los procesos: explicar, argumentar y demostrar (o probar) se encuentran situados en un continuo (en el que es difícil de identificar los límites entre unos y otros) que va desde la explicación como simple descripción de hechos, hasta la demostración matemática (o prueba abstracta, formal y teórica) en la que los argumentos se organizan en una cadena deductiva sin relación alguna con la manipulación de ejemplos. Estos dos extremos abarcan el proceso de argumentar, entendido como aportación de razones para sostener o contradecir una idea.

Ahora bien, la argumentación, según mi criterio, tiene diferentes niveles:

-En la banda alta (junto a la demostración), situaría el razonamiento, entendido como aportación de argumentos, enunciados, ideas, etc. a partir de las cuales se vayan generando otros argumentos, … (similar a la construcción de los silogismos) hasta llegar a lo que pretendemos (es decir, ha de ser visible una cadena deductiva, que todavía no está formalizada).

-Para situar el discurso de los alumnos en la banda media y baja del proceso de argumentar, haría falta un análisis del mismo que contemplara los siguientes elementos en los contenidos de las intervenciones:

- Si son más o menos coherentes con el objetivo que se pretende alcanzar.
- Si son más o menos relevantes.
- Si se observa o no un progreso en las aportaciones.
- Qué genera esas aportaciones.
- Si hay una lógica matemática en las aportaciones que se hacen.
- El grado de generalidad de los contenidos de las aportaciones, etc.

(bueno, los elementos de esta relación no pretenden ser exhaustivos, y seguro que unos se solapan con otros, necesitaría una reflexión mucho más profunda para ordenarlos y completarlos, y eso supongo que es misión del investigador).

En el primer párrafo, P9 se refiere a la "valoración de las argumentaciones". Parece que las argumentaciones, para P9, están sometidas a un proceso de valoración que, además, está en función de la etapa escolar. Asociamos esto con la *fuerza* y la *pertinencia* de la argumentación según Duval. Además consideramos que se refiere al corpus de referencia matemático al supeditar la valoración al "nivel de conocimiento de los alumnos": el conocimiento matemático se acumula y se espera que se manifieste en las argumentaciones en el contexto del aula. P9 caracteriza la argumentación como "aportación de razones para sostener o contradecir una idea" y la coloca, en línea con Duval, entre la explicación y la demostración. Sugiere "niveles" de argumentación y considera por un lado, y más cercano a la demostración, las argumentaciones basadas en un razonamiento deductivo. En otros dos niveles, más cercanos a la explicación, ubica el resto de las argumentaciones, que pertenecen a uno u otro según ciertos criterios: pertinencia, fuerza, progresividad (“progreso en las aportaciones”: entendemos esto como la apropiación parcial de los conocimientos y datos generados y el reciclaje de las conclusiones parciales útiles para la justificación de la *frase objetivo*), "lógica matemática" (en relación con el corpus de referencia matemático). P9 sugiere que la argumentación deductiva no está sujeta al "análisis" que propone para otros tipos de argumentación, pues posee, *per se*, estas características: es coherente con el objetivo a alcanzar, es relevante, progresiva, general y hace uso de una "lógica matemática". En síntesis, este profesor parece entender la argumentación deductiva como el ideal de la actividad argumentativa en el aula.

**Análisis de la *distinción* de P9**

Hay una diferencia esencial:

-Construcción de argumentos basados en concepciones matemáticas erróneas y, por tanto, que conducen a conclusiones falsas. Por ejemplo, en el episodio 1, la confusión entre función lineal y afín, y en el episodio 2, la importancia que el alumno D da a la representación gráfica de los recipientes.

-Aportación de argumentos válidos que orientan correctamente la resolución de las tareas, como es el caso de los alumnos B (episodio 1) y E (episodio 2).

En línea con su *reflexión* y con su *caracterización*, P9 distingue argumentaciones en función de los contenidos matemáticos implicados: correctos o incorrectos; es decir, verdaderos dentro de la teoría o falsos. Aunque se entiende que el valor epistémico de estas "concepciones matemáticas" puede no estar determinado a priori como en una demostración), sino estar en construcción.

**Análisis de la *reflexión* de P9**

Bueno, la dificultad que conlleva identificar e interpretar lo que dicen (o quieren decir) los alumnos y las concepciones matemáticas válidas o erróneas que hay detrás de lo que dicen o interpreto que dicen.

En línea con su *caracterización* y con su *distinción*, P9 manifiesta la importancia del contenido semántico de las intervenciones para identificar argumentaciones, aunque este aspecto parece resultarle útil para calificar las argumentaciones dentro de su esquema más que para identificarlas. Es interesante que P9 sugiera que para identificar argumentaciones es necesario "identificar e interpretar lo que dicen (o quieren decir) los alumnos"; sugiere que para P9 el contenido semántico de lo que se dice condiciona que el discurso sea, o no, argumentativo: han de considerarse los contenidos matemáticos implicados. También resulta significativo que se refiera a lo que los estudiantes "quieren decir"; esto sugiere que el discurso se construye incluso con elementos implícitos y sujetos a interpretación que deben ser considerados.

**Análisis de la *ampliación* de P9**

> Me parecen correctas las tareas y los episodios, a pesar de lo cual pienso que es posible que estas dos ideas hubieran facilitado los análisis (o tal vez no):
>
> a) Según mi criterio, en el episodio 2 el profesor interviene demasiado y de manera decisiva.
>
> b) No sé el nivel concreto de los alumnos, y sé, aunque con poca precisión, los objetivos de la investigación, pero posiblemente se hubiera facilitado el análisis que hacemos los profesores que intervenimos en la investigación si se hubieran combinado las tareas numéricas (tarea 1 y 2) propuestas, con alguna no numérica, por ejemplo proponer la tarea de doblar un folio siguiendo la base o la altura y comparar los volúmenes de los cilindros obtenidos.

Los comentarios anteriores, aunque sumamente interesantes, no resultan relevantes para nuestros propósitos.

**Análisis de las *explicaciones* de P9**

P9 no toma las intervenciones como unidades de análisis, sino el conjunto de todas las intervenciones de un individuo. No busca elementos que, agregados, conformen una argumentación de la que se puedan individualizar sus partes, sino que considera las funciones argumentativas satisfechas a partir del conjunto de intervenciones destacando elementos (tesis, garantía, dato) para evidenciar este hecho, sin que éstos sean el fundamento de sus explicaciones; es decir, no elabora sus explicaciones a partir de la estructura que describe. Este procedimiento resulta único entre los participantes y sugiere que para P9 la unidad de análisis pertinente es el discurso individual. Sus explicaciones son difíciles de analizar, entre otros motivos, porque utiliza el concepto indefinido *argumentar* y sus derivaciones en el proceso. Analizamos en este sentido su explicación para las intervenciones de A en el Episodio 1:

> **Respecto de A:** “A responde a la pregunta del enunciado: “es una relación de proporcionalidad directa”. Y hace una argumentación basada en una concepción errónea de la función de proporcionalidad directa (f. lineal): primero, no considerando la cuota inicial para calcular el precio en función del peso, y, después (interv. 3), evidenciando esa confusión cuando dice: “para que sea directamente proporcional es que (*sic*) cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual”. Este argumento pone de manifiesto sus deficiencias a la hora de diferenciar las funciones lineales y afines. También en la intervención 7 ahonda en esas deficiencias asociando únicamente la línea recta con la f. lineal. Por tanto, lo que hace A es argumentar. Y en sus argumentos hay un cierto progreso, ya que en cada intervención aporta algún elemento nuevo: en la 1, argumento numérico, en la 3, evidencia el aumento de las dos variables y en la 7, relaciona la f. lineal con una recta. Pero es una argumentación falaz porque se basa en conceptos y apreciaciones matemáticas erróneas. También sus aportaciones son de poca relevancia porque, aún recordándoselo B en la interv. 2, ignora la cuota inicial”.

P9 narra lo acaecido e inicia destacando el establecimiento de una tesis por parte de A. Inmediatamente agrega "Y hace una argumentación basada en una concepción errónea de la función de proporcionalidad directa", lo cual es una explicación inadecuada acerca de por qué es una argumentación pues utiliza una definición cíclica del concepto, aunque destaca la función argumentativa # *aportar datos para apoyar una tesis*. A partir de entonces empieza a valorar conocimientos y contenidos matemáticos implicados; valora también aspectos de la sucesión de intervenciones como un único constructo escribiendo, por ejemplo, que "en sus argumentos hay un cierto progreso, ya que en cada intervención aporta algún elemento nuevo". P9 ve los contenidos matemáticos de gran importancia para valorar argumentaciones. Es difícil, entonces, determinar sus criterios para identificar una argumentación.

Este profesor utiliza recurrentemente los vocablos argumentar, argumento y argumentación en sus explicaciones de modo que suelen no ser satisfactorias en el sentido de consentir una caracterización de sus interpretaciones acerca de la argumentación. Debemos recurrir a los elementos con los que describe esta actividad para realizar una caracterización. Un ejemplo es la explicación citada más arriba.

En todas las explicaciones de P9 vemos una fuerte intención de *#clarificar el contenido semántico*. Procura, por ejemplo, aclarar los contenidos y conceptos matemáticos involucrados haciendo referencias a los esperados entre alumnos de este nivel. Reconoce una componente subjetiva en las interpretaciones de las intervenciones; es decir, es consciente de que su análisis de las intervenciones está mediado por las interpretaciones que hace de éstas; esto queda evidenciado en la explicación que proporciona en relación con las intervenciones de C:

> **Respecto de C:** "Los argumentos de C son similares a los de A. Tienen una base errónea al considerar la función resultante como lineal. En la interv. 4, introduce la frase "los peldaños son iguales" o "las escaleras son iguales" (que interpreto que quiere decir que siempre tiene la misma pendiente, es decir, si el número de kg se va incrementando en unidades el precio se incrementa siempre en la misma cantidad, y como siempre han incrementado los kg en una unidad los puntos sobre la gráfica están separados una misma distancia en la línea recta). Y en la interv. 6 hace referencia a la línea recta como representativa única de una función lineal. Por otra parte, responde de forma coherente (interv. 10 y 12) a la pregunta de P (intev. 9), que a mi me parece sin mucho sentido, porque el enunciado dice: "Una persona, que NECESITA 4 kg de manzanas, QUIERE comprar por primera vez en el supermercado". Y digo que las respuestas a esa pregunta son coherentes porque es una situación real y el modelo matemático que ajustamos a esa situación en el caso límite del (0, 2) no se cumple: lo normal es que una persona no se haga socia si no va a comprar nada".

Declara explícitamente que realiza una interpretación de lo dicho por C y lo indica procurando aclarar los contenidos matemáticos implicados y su relación con las expresiones del alumno. Reformula la intervención T1 (6) de modo interpretativo para relacionar la expresión del alumno con contenidos matemáticos "adecuados" al nivel.

P9 constituye un caso peculiar en relación con la noción de *#continuidad en el discurso*, pues no sólo considera elementos de intervenciones previas como antecedentes, sino que considera el conjunto de las intervenciones como unidad de análisis y, por lo tanto, todos los elementos presentes en las intervenciones a la vez. Destaca momentos/elementos específicos dentro de este conjunto:

> **Respecto de A:** "en sus argumentos  hay un cierto progreso, ya que en cada intervención aporta algún elemento nuevo: en la 1, argumento numérico, en la 3, evidencia el aumento de las dos variables y en la 7, relaciona la f. lineal con una recta".

> **Respecto de B:** “Sus intervenciones más relevantes son la 2, en la inicia [*sic*] el proceso (aporta datos numéricos), la 5, que es un argumento numérico y gráfico importante, y en la 15 en la que refuta definitivamente los argumentos de B y C, basándose en la definición o en las propiedades de la función lineal: ‘para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0)’”.

A diferencia de otros profesores, que consideran elementos de intervenciones precedentes como antecedentes de la que analizan, P9 decide si el discurso de un participante es argumentativo y organiza los elementos de sus intervenciones en función de este hecho, señalando funciones argumentativas y elementos estructurales a la Toulmin, pero haciendo hincapié en los contenidos involucrados y su pertinencia según el nivel académico de los participantes y del problema matemático en cuestión..Acerca del Episodio 2, hace algunas consideraciones en sintonía con cláusulas habituales del contrato didáctico:

> **Respecto de D:** “D establece una conjetura: ‘Le conviene llevar la X porque es más grande...’ (interv. 1), que argumenta sólo de forma visual.
> Por tanto, el único argumento que aporta D es el basado en una apreciación visual errónea de los dibujos que sólo la aportación de E en la interv. 4 (ni siquiera la interv. 3 de P) le hace rectificar. Por tanto, es una argumentación (si se quiere llamar así) muy pobre en todos los sentidos”.

Resulta interesante que supedite el hecho de considerarla o no una argumentación a la validez y pertinencia del registro semiótico de representación del que provienen los datos, al valor epistémico de los mismos y, por lo tanto, a su estatus dentro del corpus de referencia. Para P9 las consideraciones epistemológicas acerca de los conocimientos involucrados son muy importantes. De hecho, se ocupa más en aclarar cuestiones referentes a los contenidos matemáticos que en responder a la tarea de explicar por qué son argumentaciones. En sintonía con la relevancia que otorga a los contenidos disciplinares y en línea con el contrato didáctico, parece considerar poco apropiado el registro visual como fuente de datos, incluso describiendo como "pobre" la argumentación basada en estos. Sus explicaciones son narrativas e introducen una fuerte componente interpretativa, haciendo consideraciones acerca de lo que se dice en las intervenciones, generalmente en relación con los contenidos matemáticos. P9 “cuenta” lo que sucede en los episodios enfatizando los contenidos disciplinares consignados, para lo cual recurre a *parafraseos explicativos* en sus explicaciones. Sus explicaciones no responden "satisfactoriamente" a la tarea de explicar por qué son argumentaciones, es decir, de forma concisa e inteligible. Esto muestra en parte la complejidad de la tarea solicitada.

Para P9 las reformulaciones son parte de la actividad argumentativa, lo que se refleja en los siguientes fragmentos:

> **Respecto de A:** "(...) en sus argumentos hay un cierto progreso, ya que en cada intervención aporta algún elemento nuevo: en la 1, argumento numérico, en la 3, evidencia el aumento de las dos variables y en la 7, relaciona la f. lineal con una recta".
> **Respecto de C:** "En la interv. 4, introduce la frase "los peldaños son iguales" o "las escaleras son iguales" (que interpreto que quiere decir que siempre tiene la misma pendiente, es decir, si el número de kg se va incrementando en unidades el precio se incrementa siempre en la misma cantidad, y como siempre han incrementado los kg en una unidad los puntos sobre la gráfica están separados una misma distancia en la línea recta). Y en la interv. 6 hace referencia a la línea recta como representativa única de una función lineal".

P9 considera que las reformulaciones pueden conformar un "progreso" en la argumentación, aunque no sabemos si *reformular* es una actividad argumentativa *per se* o sólo cuando se encuentra dentro de un "tipo de discurso" que resulta argumentativo. Cuando se refiere a las intervenciones de C, P9 es fuertemente interpretativo y considera positivamente las reformulaciones producidas. En relación con las intervenciones de B, hace frecuentes referencias a la pertinencia y fuerza de los argumentos. Incluso propone *grados de relevancia*:

> **Respecto de B:** "Sus intervenciones más relevantes son la 2, en la inicia [*sic*] el proceso (aporta datos numéricos), la 5, que es un argumento numérico y gráfico importante, y en la 15 en la que refuta definitivamente los argumentos de B y C, basándose en la definición o en las propiedades de la función lineal: 'para que sea directamente proporcional ha de pasar por el (0,0)'".

## Análisis del cuestionario de P10

### Análisis de la *caracterización* de P10

Intentar influir en el pensamiento de alguien formulando "razones" (argumentos) con el objetivo de persuadirlo para que acepte como válida tu proposición o, al menos, se llegue a cuestionar la validez de la suya. Como argumentos puedes usar silogismos, ejemplos, comparaciones, metáforas…

El foco de la caracterización de P10 está en la función argumentativa *#convencer a otros*. Para P10 argumentar tiene la intencionalidad de modificar el valor epistémico de la tesis. Pensamos que con "razones" se refiere a datos y, probablemente, a garantías en favor de la tesis, aunque no menciona vínculos funcionales entre tesis, datos y garantías. Su caracterización es general y no identificamos elementos contextuales relativos al aula de matemáticas. Es interesante que use el término *razones* y lo haga entre comillas, dando a entender que la definición no queda clarificada a partir de lo escrito y utilizándolo, a su vez, para definir el término *argumentos*. Es en la definición de esta palabra donde deben quedar condensadas las características estructurales de la argumentación y los vínculos funcionales entre sus partes. De nuevo, este procedimiento refleja la complejidad de la tarea solicitada.

**Análisis de la *distinción* de P10**

Sí, Algunos argumentos buscan ratificar una proposición inicial, otros refutarla y otros, simplemente, cuestionarla. Además, se usan diferentes tipos de argumentos: silogismos, ejemplos, comparaciones, etc.

Es interesante notar que este profesor distingue claramente las argumentaciones por funciones argumentativas. Considera, desde nuestro punto de vista, las funciones argumentativas *#aportar datos para apoyar una tesis*, *#establecer condiciones de refutación* y *#rebatir*. Además, considera como "tipos de argumento" esquemas deductivos pero también se refiere a "ejemplos" y "comparaciones" como posibles argumentos; aunque no sepamos a qué se refiere exactamente, parece considerar argumentaciones no deductivas.

**Análisis de la *reflexión* de P10**

No demasiado (creo), pero quizá confundo argumentación con justificación; no sé muy bien dónde está la diferencia entre ambos conceptos. Pienso que argumentan siempre que intentan influir en el pensamiento de los demás, persuadirlos de alguna manera. En cambio, cuando justifican sólo buscan reforzar su opinión.

Es difícil interpretar su reflexión pues no hay elementos suficientes. Sin embargo es interesante que sugiera que "reforzar una opinión" no necesariamente implica procurar convencer a otros. Por otra parte, P10 refuerza el foco de su *caracterización*: *#convencer a otros*.

**Análisis de las *explicaciones* de P10**

Es interesante observar que este profesor explica por qué son argumentaciones las intervenciones que identificó apelando a aspectos estructurales generales de las intervenciones, a sus funciones argumentativas y al objetivo de convencer al otro, sin hacer uso de los contenidos temáticos ni de narraciones que aclaren lo sucedido en los episodios desde el punto de vista semántico. Es el único profesor que procede de este modo. Esta excepcionalidad hace reflexionar acerca de la dificultad inherente a esta tarea; al apelar a los aspectos semánticos concretos de las intervenciones, los profesores nos hacen partícipes de su propia evaluación de los argumentos, procuran establecer su validez (destacando o estableciendo su valor epistémico), su coherencia cognitiva, etc. Esta valoración es parte fundamental del poder explicativo de su explicaciones. Se plasma en modos diversos: estableciendo relaciones funcionales, justificando el contenido matemático, parafraseando de modo explicativo, aclarando el contenido semántico, destacando la falsedad o la veracidad de las proposiciones, etc.

P10 considera que algunas intervenciones se "suman" para reforzar la función argumentativa *#convencer a otros*. Es significativo que señale diversas intervenciones y dé una única explicación en este sentido. La *#continuidad en el discurso* no está dada, en sus explicaciones, a través del reconocimiento del "reciclaje" de elementos de proposiciones anteriores, sino a través de la unicidad de la intención que articula las intervenciones. En sintonía con lo anterior, sus explicaciones se basan sobre todo en las funciones argumentativas *#aportar datos para apoyar una tesis* y *#convencer a otros*. Utiliza nociones generales en este sentido, que incluyen elementos estructurales (a la Toulmin), sin apelar a la narración de lo sucedido en los episodios basada en los contenidos implicados. Estos son dos ejemplos en este sentido: :

> **T1 (1, 3, 7)** "Yo creo que son argumentaciones porque parte de una proposición que considera cierta y formula una serie de "razones" (argumentos) a favor de ésta, con la intención de modificar el pensamiento de su compañero, de persuadirlo, de influenciarlo a través de sus argumentos para que admita como válida la proposición". [Se refiere a las intervenciones de A que identifica]
>
> **T1 (1, 8)** "Creo que son argumentaciones porque intenta convencer con "razones" (argumentos) a los demás. Como hemos dicho antes, influir en su pensamiento para que acaben aceptando su proposición como válida. Llega a una conclusión que refuerza su proposición, a partir de unos hechos concretos (observación de los dos dibujos que ha proporcionado el profesor)". [Se refiere a las intervenciones de D que identifica]

P10 identifica T1 (1, 3, 4, 7) como argumentaciones. Para P10 las reformulaciones son parte de la práctica argumentativa si se emiten con la intención de #*convencer a otros*. El foco está en la intención y, aparentemente, no en el contenido. Además, P10 utiliza habitualmente la palabra "razones", entrecomillada, como equivalente a *argumento*. Consideramos que utiliza las comillas para significar indefinición y que es en este concepto que hace recaer los vínculos funcionales entre las partes que reconoce.

P10 funda sus explicaciones en #*convencer a otros* y sin embargo no considera el #*convencerse a uno mismo*, explícitamente, como una función argumentativa. Suele hacer hincapié en la función argumentativa #*establecer una tesis*; ejemplos de esto son las explicaciones citadas más arriba. A partir de las explicaciones que proporciona y según los análisis precedentes, sugerimos que P10 considera el modificar el valor epistémico de una tesis como la función primordial de la argumentación.