1. Considerem els vectors de $\mathbb{R}^3$
$$\vec{u}_1 = (1, 2, -1) \quad \vec{u}_2 = (1, 3, a) \quad \vec{u}_3 = (a, 1, 1) \quad \vec{u}_4 = (0, 1, 1)$$
i el subespai $E = \langle \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{u}_3 \rangle$.
   (a) Discutiu en funció de a quant val la dimensió de E.
   (b) Per a $a = 0$, doneu una base de $\mathbb{R}^3$ que contingui els vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$.
   (c) Per a quins valors de a el vector $\vec{u}_4$ pertany a E?

2. Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ i el vector $\vec{w} = (1, 5)$.
   (a) Comproveu que els valors propis de la matriu són $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 5$.
   (b) Trobeu un vector propi $\vec{v}_1$ de valor propi λ_1 i un vector propi $\vec{v}_2$ de valor propi λ_2.
   (c) Expresseu el vector $\vec{w}$ com a combinació lineal de $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$.
   (d) Calculeu $A^{20}\vec{w}$
   (e) Comproveu que, per a n molt gran, $A\,(A^n\vec{w})$ és aproximadament igual a $5\,A^n\vec{w}$.

3. La següent funció modelitza l'abast d'una malaltia infecciosa en una determinada població:
$$f(t) = 2t \cdot e^{-\frac{t^2}{50}}$$
donant t en setmanes transcorregudes des de la descoberta dels primers casos i $f(t)$ en tant per cent de població afectada.
   (a) Es considera que la malaltia entra en fase d'epidèmia quan el percentatge d'afectats supera el 4% de la població total. Durant quina setmana entra en fase d'epidèmia? (no es tracta de trobar el moment exacte en el que es produirà l'epidèmia sinó de localitzar-lo).
   (b) Les autoritats consideren que no podrien donar resposta en cas que el percentatge d'afectats arribés al 10%. Just en acabar la segona setmana ($t = 2$) calculen el ritme de creixement. Si seguís aquest ritme de creixement de manera constant, quan calculeu que s'arribaria a aquesta situació crítica?
   (c) Es considera que la malaltia entra en fase d'hiper-epidèmia quan el percentatge d'afectats supera el 7% de la població total. Comproveu que segons el model donat per f mai s'arriba a aquesta fase.
   (d) Si la població total és de 3 400 000, calculeu quants afectats hi ha en el moment de màxima extensió de la malaltia (segons el model donat per f).
   (e) Comproveu que, un cop assolit el màxim, aquest model dóna una evolució de la malaltia descendent (segons el model donat per f).

4. (a) Trobeu el polinomi de Taylor de grau 8 al voltant de $a = 0$ de la funció $f(x) = \cos(x)$.
   (b) Useu el polinomi de l'apartat anterior per donar una aproximació de $\cos(0.2)$.
   (c) Doneu una cota superior de l'error comès en l'aproximació.