

## Problema “motivador”

Un estudi realitzat sobre varies poblacions de balenes va donar les dades següents: les femelles no produïen cap cria fins els 4 anys d'edat. Les seves fertilitats mitjanes (nombre mitjà de cries femelles durant quatre anys), a partir dels 4 anys, eren

grup d'edat	4 a 7 anys	8 a 11 anys	12 o més
taxa de fertilitat	0.63	1	0.90

i la mortalitat al llarg de quatre anys 43 % en cada grup, inclòs el de 0 a 3. Quina serà la població d'aquí a 8 anys si la població actual és

grup d'edat	0 a 3	4 a 7 anys	8 a 11 anys	12 o més
nombre de femelles	50	10	11	22

I la població d'aquí a 40 anys?

- $a_n$  := quantitat de femelles d'entre 0 i 3 anys el quatrieni  $n$
- $b_n$  := quantitat de femelles d'entre 4 i 7 anys el quatrieni  $n$
- $c_n$  := quantitat de femelles d'entre 8 i 11 anys el quatrieni  $n$
- $d_n$  := quantitat de femelles de 12 o més anys el quatrieni  $n$

de manera que

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 0.63 b_n + c_n + 0.90 d_n \\b_{n+1} &= 0.57 a_n \\c_{n+1} &= 0.57 b_n \\d_{n+1} &= 0.57 c_n + 0.57 d_n\end{aligned}$$

Matricialment és més senzill d'expressar

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.63 & 1 & 0.90 \\ 0.57 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.57 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.57 & 0.57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

En general podem escriure:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \\ c_{n-2} \\ d_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 11 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Per tant, si volem calcular la població d'aquí a quaranta anys (10 quatrienis):

$$\begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \\ c_{10} \\ d_{10} \end{pmatrix} = A^{10} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.63 & 1 & 0.90 \\ 0.57 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.57 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.57 & 0.57 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 11 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47.794 \\ 26.705 \\ 14.925 \\ 18.9 \end{pmatrix}$$

### Preguntes per motivar la teoria:

Quina és la composició de la població a la llarga?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ A^n \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 11 \\ 22 \end{pmatrix} \right] ?$$

Quina és la proporció de balenes de 0 a 3 anys a la llarga?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_n}{a_n + b_n + c_n + d_n} \right] ?$$