ÀLGEBRA

Grau en Enginyeria Informàtica Curs 2010-2011

I. Matrius

1. Cossos commutatius. El cos $\mathbb{Z}_2$. Matrius. Operacions amb matrius. Matrius invertibles.

2. Transformacions elementals per files. Forma normal de Gauss-Jordan d'una matriu. Rang d'una matriu. Criteri d'invertibilitat i càlcul de matrius inverses.

3. Sistemes d'equacions lineals i varietats lineals de K^n. Mètode de Gauss. Vectors directors i dimensió de varietats lineals. Teorema de Rouché.

4. Dependèncial lineal de files i columnes de matrius. Teorema del rang. Propietats fonamentals del rang.

5. Determinant d'una matriu quadrada. Propietats del determinant. Càlcul directe de la inversa d'una matriu. Aplicació de l'esglaonament de matrius al càlcul de determinants.

II. Espais Vectorials

1. Definició d'espai vectorial i exemples. Combinacions lineals de vectors. Subespais. Sistemes de generadors. Subespais de K^n i varietats lineals.

2. Dependència lineal de vectors. Criteri de dependència lineal. Bases, dimensió i coordenades. Treball en coordenades.

3. Ampliació de famílies linealment independents en bases. Lema de Steinitz. Suma i intersecció de subespais. Fórmula de Grassmann.

III. Aplicacions lineals i diagonalització de matrius

1. Aplicacions lineals. Matriu associada a una aplicació lineal de K^n en K^m. Composició d'aplicacions lineals. Subespais nucli i imatge d'una aplicació lineal. Isomorfismes.

2. Valors propis i vectors propis d'una matriu quadrada. Criteri de diagonalització Aplicacions de la diagonalització: càlcul de potències de matrius i resolució de sistemes d'equacions diferencials lineals amb coeficients constants.

Exercicis d'Àlgebra

Curs 2010-2011

Grau en Enginyeria Informàtica

I. Matrius.

1. Resoleu el següent sistema d'equacions amb incògnites $A, B \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$.

$$\begin{cases} 4A - 3B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix} \\ \\ 5A + 2B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 11 \\ 10 & -5 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Considerem les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Expresseu cada columna de la matriu AB com a combinació lineal de les columnes de A.

3. Imagineu que A és una matriu $m \times n$ amb entrades a $\mathbb{R}$, i $b_1, \ldots, b_m$ són m nombres reals. Proveu que el sistema d'equacions lineals:

$$AX = B, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

té solució si i només si la columna B es pot expressar com a combinació lineal de les columnes de la matriu A.

4. Siguin A, $B \in M_n(K)$ invertibles. Trobeu totes les $X \in M_n(K)$ que satisfan:

$$AB^{-1}AXA^{-1}B + 5AB = 0.$$

5. Comproveu que les següents matrius són inverses l'una de l'altra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu l'única matriu $X \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ que satisfà:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trobeu l'única matriu $Y \in M_{3\times 2}(\mathbb{Q})$ que satisfà:

$$Y \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ 12 & -4 \\ 28 & -11 \end{pmatrix}.$$

(b) Trobeu la dimensió i una base del subespai V format per les matrius tals que la suma dels elements de cada columna pren el mateix valor per a les tres columnes. Amplieu la base de V en una base de $M_{2\times 3}(\mathbb{Z}_2)$.

14. Trobeu la dimensió i una base de F, G, $F+G$ i $F\cap G$ en cadascun dels següents casos.

(a) $F = \langle\, (1,1,-1),\ (2,0,-1)\,\rangle_{\mathbb{R}},\ G = \langle\, (1,0,-1),(2,3,0),(4,3,-2)\,\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(b) $F = \big\langle\, (0,1,0,0),\ (0,1,1,0),\ (1,0,1,0)\,\big\rangle_{\mathbb{Z}_2},\ G = \big\langle\, (1,0,0,1),\ (1,1,1,0),\ (1,1,1,1)\,\big\rangle_{\mathbb{Z}_2} \subseteq (\mathbb{Z}_2)^4$.

15. Trobeu la dimensió i una base de F, G, $F+G$ i $F\cap G$ en cadascun dels següents casos. Amplieu la base de $F\cap G$ a una base de F i a una base de G.

(a) $F = \{(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^5 \mid x+y+2z+2u=0,\ 3y+3z-t+2u=0\}$,
$G = \{(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^5 \mid 2x-y+t=0,\ 3x-z+t-4u=0\}$,

(b) $F = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{Q}^4 \mid x+z+t=0,\ y+2z-t=0,\ 2x-y+3t=0\}$
$G = \langle\, (1,1,0,1),\ (3,2,-1,0),\ (1,0,-1,-2)\,\rangle_{\mathbb{Q}}$.

16. Siguin E, F, G tres subespais vectorials de dimensió 2 de $\mathbb{R}^5$. Esbrineu la dimensió de $F+G$ sabent que $F\neq G$ i $E\cap(F+G)=\{0\}$.

III. Aplicacions lineals i diagonalització de matrius

1. Determineu quines de les següents aplicacions són lineals:

$f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ \ f(x,y)=(0,y+1,x-y)$

$f\colon \mathbb{Q}^2\to\mathbb{Q}^2,\ f(x,y)=(xy,x-y)$

$f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ \ f(x,y,z)=(3x-z,2x+z)$

$f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \ f(x,y)=e^{x+y}$

$f\colon (\mathbb{Z}_2)^2\to\mathbb{Z}_2,\ \ f(x,y)=x+y$

$f\colon \mathbb{Q}\to\mathbb{Q}^3,\ \ f(x)=(-x,0,3x)$

$d\colon \mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x],\ \ d(p(x))=p'(x)$

$f\colon M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2,\ \ f(A)=(a_{22}-\sqrt{2}a_{11},7a_{22})$

$f\colon M_n(\mathbb{Z}_2)\to M_n(\mathbb{Z}_2),\ \ f(X)=X^t$

$\det\colon M_n(\mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$

2. Sigui $f:\mathbb{Q}^4\to\mathbb{Q}^3$ l'aplicació lineal donada per

$$f(x,y,z,t)=(x+y+z+t,x-2y-t,x+7y+3z+5t).$$

Calculeu $f(1,2,3,4)$, $f^{-1}(1,1,0)$ i $f^{-1}(0,0,0)$.

Trobeu una matriu $A\in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$ tal, que f coincideix amb l'aplicació lineal:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}.$$

Àlgebra **Grau en Enginyeria Informàtica**

26 de novembre de 2010 **Grups 5+6, Examen A**

Qüestió 1. (1 punt)

Definició de família linealment independent de vectors d'un K-espai vectorial.

Qüestió 2. (2=1+1 punts)

Considerem la varietat lineal

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

essent $A \in M_{4\times3}(\mathbb{R})$ una matriu sobre la qual tenim la següent informació:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rang}(A) = 2.$$

(a) Proveu que $V \neq \emptyset$ (i.e. el sistema d'equacions lineals que defineix V és compatible), tot donant una solució particular $(a, b, c) \in V$.

(b) Calculeu la dimensió de V.

Exercici 1. (3=1+1+1 punts)

Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$.

(a) Apliqueu transformacions elementals a la matriu A fins convertir-la en una matriu esglaonada A'.

(b) Trobeu una matriu invertible P tal, que $PA = A'$.

(c) Expresseu la segona fila de A' com a combinació lineal de les files de A.

Exercici 2. (4=2+2 punts)

Sigui $\mathbb{R}_2[x]$ el subespai de $\mathbb{R}[x]$ format pel polinomis de grau menor o igual que 2. Considerem el subespai:

$$F = \left\langle\, x^2 + 5x + 4,\ x^2 - x,\ 3x^2 + 2 \,\right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}_2[x].$$

(a) Calculeu la dimensió i una base de F.

(b) Proveu que el polinomi x^2+8x+6 pertany a F i trobeu les seves coordenades respecte de la base de F que heu trobat a l'apartat anterior.

Àlgebra **Grau en Enginyeria Informàtica**

2 de febrer de 2011

Questió 1. (1 punt)

D'una aplicació lineal, $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tenim la següent informació:

$$f(1,0,0,0) = f(0,1,0,0) = (3,5), \quad f(0,0,1,0) = f(0,0,0,1) = (4,7).$$

Calculeu la imatge $f(x,y,z,t)$ d'un vector genèric $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

Questió 2. (2 punts)

Una aplicació lineal, $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, satisfà: $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0,0)\}$.
Proveu que f és un isomorfisme.

Exercici 1. (3 = 2+1 punts)

(a) Trobeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de la següent aplicació lineal:

$$f\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z,t,u) \mapsto (3t+3u, 2y-z-t, -2y+z-u).$$

(b) Proveu que el vector $u = (7,1,1,1,-1)$ pertany al subespai $\mathrm{Ker}(f)$, i amplieu aquest vector a una base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercici 3. (4 punts)

Resoleu la següent equació diferencial, on $x(t)$, $y(t)$ són funcions diferenciables sotmeses a les condicions inicials: $x(0) = 50$, $y(0) = 20$.

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& 4x(t) + 3y(t) \\ y'(t) &=& 6x(t) + y(t) \end{array}\right\}$$

CÀLCUL 6 ECTS Curs 2010-11

Grau de: Informàtica, Sistemes de telecomunicació i Electrònica de telecomunicació

Programa:

1.- Números complexos. Aritmètica dels números complexos. Interpretació geomètrica, mòdul i argument d'un número complex. Exponencial complexa. Polinomis: arrels i factorització. Ones elementals: fasors.

2.- Càlcul diferencial i càlcul integral. Càlcul de derivades: regles de derivació i derivades de les funcions elementals. Relacions entre una funció i la seva derivada. Optimització de funcions: extrems relatius i extrems absoluts. Mètode de Newton. Representació gràfica de funcions. Càlcul de primitives: relació amb el càlcul d'integrals. Integració numèrica: regla de Simpson. Aplicacions de la integral: càlcul d'àrees planes i de volums de revolució. Corbes paramètriques: vector tangent, longitud i curvatura.

3.- Equacions diferencials. Introducció a les derivades parcials. Derivació implícita. Noció d'equació diferencial i de solució d'una equació diferencial. Equacions diferencials de primer ordre resolubles de forma elemental. Equacions diferencials lineals d'ordre superior amb coeficients constants.

Bibliografia:

- N. Levinson, R.M. Redheffer 'Curso de variable compleja' (Cap. 1) Ed. Reverté, 1981
- S.L. Salas, E. Hille 'Calculus' Vol. 1, Ed. Reverté, 2002
- D.G. Zill 'Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado' International Thomson, 1997
- F. Carreras, M. Dalmau, F.J.M. Albéniz, J.M. Moreno 'Ecuaciones diferenciales' Ed. Dept. de Matemàtiques, 1987

Problemes i avaluació:

L'alumne haurà de resoldre els problemes de les llistes. El professor de problemes resoldrà els dubtes que se li plantegin i proposarà mètodes de solució. Al llarg del semestre es faran tres sessions especials en les quals l'alumne haurà de resoldre i lliurar problemes similars als proposats a les llistes. Les sessions especials aportaran el 30% de la nota final. Hi haurà un examen al final del semestre en el qual s'avaluaran els coneixements de tota la matèria explicada. La nota d'aquest examen aportarà el 70% de la qualificació final.

Professors:

Julià Cufí (teoria i problemes), despatx: C1/114, correu electrònic: jcufi@mat.uab.cat
Margarida Miró (problemes), despatx: C1/212, coreu electrònic: marga@mat.uab.cat
David Marín (problemes), despatx: C1/126, correu electrònic: davidmp@mat.uab.cat

CÀLCUL

Enginyeria de Sistemes Electrònics, 2010-2011

Números complexos

1.- Siguin $z_1 = 1+2i$, $z_2 = -2-3i$, $z_3 = \frac{1}{2} - i$, $z_4 = -5i$. Calculeu:

$$3z_1+z_2,\ |z_1\cdot z_2|,\ |z_1|\cdot|z_2|,\ |z_1+z_2|,\ |z_1|+|z_2|,\ z_1\cdot z_2 - z_3\cdot z_4,\ |\bar{z}_1 - \bar{z}_2^2|,\ \frac{z_1+1}{1-z_2},\ \frac{z_2}{z_4-\bar{z}_3},\ (z_1+z_3)^2\cdot\bar{z}_1$$

2.- Donat el nombre complex $z = \frac{2-xi}{2+xi}$, trobeu un nombre real x per a què la part real de z sigui zero. Hi ha algun x tal que z només tingui part real? Quins són aquests z que s'obtenen?

3.- Convertiu de radians a graus i a l'inrevés els angles següents:

$$45^o,\ \pi\,\text{rad},\ 7\frac{\pi}{3}\,\text{rad},\ 240^o,\ 2\,\text{rad},\ 136^o,\ 247^o,\ 23\,\text{rad}$$

4.- (a) Trobeu geomètricament, fent servir triangles, els valors de $\sin(\pi/4)$, $\cos(3\pi/4)$, $\tan(5\pi/4)$.

(b) Sabent que a 30m de distància la punta d'un arbre es veu en un angle de 60 graus, quina és l'alçada de l'arbre?

5.- Expresseu els nombres següents en forma polar:

$$3+4i, \qquad 2-i, \qquad -3+i, \qquad -2-3i.$$

G. 1

6.- Expresseu els següents nombres complexos en la forma $a+bi$:

$$e^{i\pi}, \qquad e^{1/2+i\pi/4}, \qquad e^{e^{2+i\pi/2}}.$$

G. 2

7.- Calculeu:

$$i\cdot\left(\cos(\tfrac{\pi}{7})+i\sin(\tfrac{\pi}{7})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{5\pi}{14})+i\sin(\tfrac{5\pi}{14})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{3\pi}{2})+i\sin(\tfrac{3\pi}{2})\right)$$
$$\cdot\left(\cos(\tfrac{-\pi}{28})+i\sin(\tfrac{-\pi}{28})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{17\pi}{7})+i\sin(\tfrac{17\pi}{7})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{-85\pi}{28})+i\sin(\tfrac{-85\pi}{28})\right).$$

8.- Trobeu tots els complexos tals que el seu conjugat és el seu invers.

9.- Calculeu els nombres següents: $(1+i)^{29}$, $(-1+i)^{17}$, $(-\sqrt{3}+i)^{13}$. A més expresseu en la forma $x+iy$, on x i y són reals, els nombres:

$$(2+2i)^{12}, \qquad (1-i)^{36}, \qquad (-\sqrt{3}-i)^{13}, \qquad i^{1999}.$$

10.- Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

$$z^2 = i \qquad z^4 = i \qquad z^3 = 1+\sqrt{3}i$$
$$z^6 = -1+i \qquad z^5 = -i$$

11.- Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

$$e^{3z-1} = i, \qquad e^z = 1, \qquad e^{2z} = 4$$

Examen

Enginyeria de Telecomunicacions, curs 2010-2011

23 de febrer de 2011

1. Expresseu el nombre complex

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

en forma binòmica, $a+bi$, i en forma polar, $re^{i\varphi}$.

2. Considereu la funció $f(x)=x^3e^{-x}$.

   (a) Trobeu els intervals de creixement, els extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada de $f(x)$.

   (b) Trobeu els extrems absoluts de $f(x)$ a l'interval $[3,5]$.

3. Calculeu l'àrea de la regió limitada per les corbes $y=\frac{1}{1+x^2}$ i $y=\frac{21}{5}-x^2$.

4. Trobeu les solucions generals de les equacions diferencials següents:

   (a) $xy'+2y=x^4$. En aquest cas, trobeu-ne també la solució particular que satisfà $y(0)=0$.

   (b) $y''-4y'+4y=0$ i $y''-4y'+4y=2x-1$

CÀLCUL

Grau en Enginyeria Informàtica

Curs 2010 - 2011

TEMARI

1. Nombres complexos

Els nombres complexos com ampliació del conjunt dels nombres reals. Suma i producte de nombres complexos. Interpretació geomètrica, mòdul i argument d'un nombre complex. Conjugat i divisió de nombres complexos. Exponencial complexa. Arrels de la unitat, arrels d'un nombre complex.

2. Càlcul diferencial

Teorema del valor mig, intervals de creixement, extrems relatius i extrems absoluts.
Regles de l'Hôpital. Derivades successives.
Concavitat i convexitat. Representació gràfica de funcions.

3. Càlcul integral

La integral de Riemann: definició i propietats bàsiques. El Teorema Fonamental del Càlcul.
Càlcul de primitives: integració per parts i canvis de variables. Primitives de funcions racionals: descomposició en fraccions simples. Primitives de funcions trigonomètriques.
Aplicacions de la integral: Càlcul d'àrees planes, de longituds de corbes, de volums i d'àrees de cossos de revolució.

4. Equacions diferencials

Noció d'equació diferencial i de solució d'una equació diferencial.
Equacions diferencials de primer ordre resolubles de forma elemental.
Equacions diferencials lineals d'ordre arbitrari. Cas de coeficients constants. Mètode dels coeficients indeterminats.

BIBLIOGRAFIA

- **Càlculo de una y varias variables**; S.L. Salas - E.Hille; Ed. Reverté, 1994.
- **Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático**, Vol. I; R. Courant - F. John; Ed. Limusa, 1974.
- **Ecuaciones Diferenciales**; F. Carreras - M. Dalmau - F.J.M. Albéniz; Universitat Autònoma de Barcelona.
- **Ecuaciones diferenciales con aplicaciones**; D.G. Zill; Grupo Ed. Iberoamérica, 1997
- **Cálculo, Conceptos y contextos**; J. Stewart; International Thompson Editors, 1999

AVALUACIÓ

La nota mínima per aprovar l'assignatura serà un 5. Aquesta nota estarà integrada per:

- El 60% de la nota d'un examen de tota la matèria que es realitzarà al final del curs. La puntuació d'aquest examen serà sobre 10. Els alumnes que no assisteixin a aquest examen seran qualificats com "No Presentat".
- Un 10% de les notes obtingudes en els exercicis que s'hagin entregat durant els seminaris dels dies 18/02, 11/03, 1/04 i 20/05. La puntuació de cada seminari serà sobre 2.5.
- Un 30% de la nota obtinguda en un examen que es realitzarà durant el seminari del dia 29/04. La puntuació d'aquest examen serà sobre 10 i la matèria examinada correspondrà a la que s'hagi donat fins el dia 15/04.

Així mateix, per a aprovar l'assignatura serà imprescindible treure una nota no inferior a 4 en cadascuna de les tres parts anteriors. Durant la setmana del 13 al 17 de juny hi haurà la possibilitat que els alumnes que hagin fet l'examen del dia 29/04 i no hagin arribat al 4 recuperin aquella nota. Les notes dels altres seminaris no seran recuperables.

2.08. Trobeu els punts crítics i els extrems locals de les funcions:

(a) $f(x) = x^3 + 3x - 2$ (b) $f(x) = (1-x)^2 \cdot (1+x)$ (c) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

(d) $f(x) = x^3(1-x)^2$ (e) $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^3$ (f) $x \cdot \sqrt[3]{1-x}$

2.09. Trobeu el valor més gran que pot tenir $x \cdot y$ sabent que $x + y = 40$ i que x, y són nombres positius.

2.10. Sigui ABC un triangle amb vèrtexs $A = (-3, 0)$, $B = (0, 6)$, $C = (3, 0)$. Sigui P un punt del segment que uneix B amb l'origen. Trobeu la posició de P que minimitza la suma de les distàncies de P als vèrtexs.

2.11. Calculeu les dimensions d'una caixa rectangular sense tapa que tingui volum màxim si la llargada de la base ha de ser el doble de l'amplada i és tenen 1000 cm^2 de material per construir-la.

2.12. Trobeu les dimensions del triangle isòsceles d'àrea màxima i perímetre 12 cm.

2.13. L'àrea d'impressió sobre un paper ha de ser de 81 cm^2, els marges superiors i inferiors han de ser de 3 cm i els marges laterals han de ser de 2 cm. Si el preu d'una pàgina és proporcional al perímetre, trobeu quines dimensions del paper són més econòmiques.

2.14. Una corda de 28 cm de llargada es talla en dos trossos. Amb un dels trossos es fa un quadrat i amb l'altra un cercle. Trobeu com han de ser els trossos perquè la suma de les dues àrees sigui mínima.

2.15. De tots els cilindres tancats de volum V, trobeu el que té l'àrea mínima.

2.16. Es vol construir un dipòsit d'acer en forma de cilindre circular i semiesferes en els extrems per emmagatzemar gas propà. El cost per metre quadrat dels extrems esfèrics és el doble que el de les parets cilíndriques. Quines dimensions són les més econòmiques si el volum desitjat és de 10 metres cúbics?

2.17. Trobeu els intervals de concavitat, de convexitat i els punts d'inflexió de les funcions:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + x$ (b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

(d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ (e) $f(x) = x^3(1-x)$ (f) $f(x) = \ln(x^2+1)$

2.18. Donada la funció $f(x) = x^5 + \dfrac{5}{2}x^4 - 1$

(a) Determineu els intervals de creixement, de decreixement i els extrems relatius de f.

(b) Proveu que aquesta funció té exactament tres zeros reals.

2.19. Donada la funció $f(x) = (x^2 - 3) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

(a) Determineu els intervals de creixement, de decreixement i els extrems relatius de f.

(b) Determineu els intervals de concavitat, de convexitat i els punts d'inflexió de f.

4.08. Llancem una pilota enlaire a una velocitat inicial de 20 m/s des d'un balcó situat a 25 m del carrer. Determineu la funció posició d'aquest moviment. Quant de temps tardarà a arribar la pilota a terra? A quina altura màxima arribarà? En quin moment arribarà al punt més alt del seu recorregut? (Suposeu que $g = 10$ m/s^2.)

4.09. Trobeu la solució particular de les equacions diferencials següents amb la condició inicial que s'indica:

(a) $y' = -2y$, amb $x_0 = -1$, $y_0 = 3e^2$	(b) $y' = (x+y)^2$, amb $x_0 = 0$, $y_0 = 1$
(c) $(1+e^x)yy' = e^x$, amb $x_0 = 0$, $y_0 = 1$	(d) $x^2 + y^2 = 2xyy'$, amb $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

4.10. Segons la llei de Newton, la velocitat de refredament d'un cos és proporcional a la diferència entre la temperatura T del cos i T_0 de l'aire.

Si un cos situat en una habitació a 20^o de temperatura ambient constant ha trigat vint minuts en refredar-se de 100^o a 60^o :

(a) Determineu la variació de la seva temperatura amb el temps.

(b) Calculeu el temps necessari per a què es refredi fins a 30^o.

4.11. El procés de desintegració d'un element radioactiu fa que la seva concentració disminueixi a una velocitat proporcional a la mateixa concentració.

(a) Descriviu això mitjançant una equació diferencial.

(b) Mostreu que la concentració es redueix a la meitat en un temps que no depèn de la concentració inicial (aquest temps s'anomena *vida mitjana* de l'element en qüestió).

4.12. El carboni existeix principalment en dues formes C^{12} i C^{14}, de les quals la primera no és radioactiva, però la segona sí, amb una vida mitja de 5.568 anys. A l'atmosfera terrestre tenen lloc certs processos que fan que la proporció de C^{14} es mantingui constant, amb un grau de radioactivitat de $6'68$ desintegracions per minut i per gram de carboni. Els éssers vius mantenen un intercanvi de carboni amb l'atmosfera, gràcies al qual la proporció de C^{14} té el mateix valor. Tanmateix, quan moren deixa de tenir lloc aquest intercanvi i per tant la proporció de C^{14} comença a disminuir al ritme determinat per la seva vida mitjana.

(a) Unes mostres de carbó vegetal procedents de les coves prehistòriques de Lascaux (França) donen $0'91$ desintegracions per minut i per gram de carboni. Quina és la seva antiguitat?

(b) Féu el mateix en el cas d'unes bigues de fusta trobades a Nippur (Mesopotàmia) i que donen $4'09$ desintegracions per minut i per gram de carboni.

4.13. Resoleu les equacions diferencials lineals homogènies

(a) $y'' + 6y' + 9y = 0$	(b) $y^{(4)} - 6y''' + 12y'' - 8y' = 0$
(c) $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$	(d) $y^{(4)} - 6y''' + 13y'' - 12y' + 4y = 0$
(e) $y''' - y'' - 2y' = 0$	(f) $y^{(6)} + 9y^{(4)} + 24y'' + 16y = 0$
(g) $y'' - 6y' + 13y = 0$	(h) $y'' - 10y' + 34y = 0$

Universitat Autònoma de Barcelona etse ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA	**Càlcul** **Enginyeria en Informàtica** Recuperació del Primer Parcial	17 de juny de 2009

Heu de posar el nom, els cognoms i el número de grup a cada full

No poseu dos problemes diferents en un mateix full

Temps màxim: 3.5 hores

Revisió d'exàmens: dimarts 30 de juny a les 12:00, seminari D, ETSE.

Cadascun dels 4 exercicis es valorarà sobre 10 punts.

---

1. (a) Doneu l'expressió en forma cartesiana de tots els nombres complexos z que verifiquen l'equació: $z^3 = 1 - i$

   (b) Trobeu el mòdul, l'argument i l'expressió cartesiana de $(\sqrt{3}+i)^{72}$

2. (a) Trobeu la derivada de la funció $f(x) = (3x)^{1+\cos(x^3)}$

   (b) Resoleu l'equació: $\ln(x+3) + \ln(x+1) - \ln x = \ln(x+10)$.

3. Calculeu les primitives següents:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

4. (a) Resoleu l'equació diferencial: $\quad y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$

   (b) Trobeu totes les solucions de l'equació diferencial:

$$y'' + 2y' + 17y = 34\sin x - 12\cos x$$

Càlcul

Enginyeria en Informàtica

Recuperació del Segon Parcial

17 de juny de 2009

Heu de posar el nom, els cognoms i el número de grup a cada full

No poseu dos problemes diferents en un mateix full

Temps màxim: 3.5 hores

Revisió d'exàmens: dimarts 30 de juny a les 12:00, seminari D, ETSE.

Cadascun dels 4 exercicis es valorarà sobre 10 punts.

---

1. Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
   (a) Demostreu que té tres arrels reals i feu la seva representació gràfica.
   (b) Trobeu tots els punts $(x, f(x))$ tals que la recta tangent a la gràfica en aquests punts és paral·lela a la recta $y + 9x = 2$.

2. Sigui R la zona delimitada per les funcions $f(x) = \frac{4x}{\pi}$, $g(x) = \cos x + 2$ i les rectes $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.
   (a) Trobeu el volum del cos de revolució obtingut al girar R al voltant de l'eix OX.
   (b) Trobeu el volum del cos de revolució obtingut al girar R al voltant de l'eix OY.

3. (a) Estudieu la convergència de la sèrie numèrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n + p^n}$ segons els valors de $p > 0$.
   (b) Trobeu l'interval de convergència de la sèrie de potències $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^{n+1}$. Doneu la suma de la sèrie per als punts d'aquest interval.

4. (a) Estudieu la convergència de $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$, segons els valors de $\alpha > 0$.
   (b) Sigui f periòdica de període 2π tal que $f(x) = \pi^2 - x^2$ si $x \in [-\pi, \pi]$. Trobeu la sèrie de Fourier de f i utilitzeu-la per a deduir el valor de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

UAB Universitat Autònoma de Barcelona
etse ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA

Càlcul

Enginyeria en Informàtica

Examen Final

17 de juny de 2009

Heu de posar el nom, els cognoms i el número de grup a cada full

No poseu dos problemes diferents en un mateix full

Temps màxim: 3.5 hores

Revisió d'exàmens: dimarts 30 de juny a les 12:00, seminari D, ETSE.

Cadascun dels 7 exercicis es valorarà sobre 10 punts.

---

1. Doneu l'expressió en forma cartesiana de tots els nombres complexos z que verifiquen l'equació: $z^3 = 1 - i$

2. Calculeu $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

3. Trobeu totes les solucions de l'equació diferencial:
$$y'' + 2y' + 17y = 34\sin x - 12\cos x$$

4. Demostreu que la funció $f(x) = x^3 - 3x + 1$ té tres arrels reals i feu la seva representació gràfica.

5. Trobeu l'interval de convergència de la sèrie de potències $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^{n+1}$. Doneu la suma de la sèrie per als punts d'aquest interval.

6. Estudieu la convergència de $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, segons els valors de $\alpha > 0$.

7. Sigui f periòdica de període 2π tal que $f(x) = \pi^2 - x^2$ si $x \in [-\pi, \pi]$. Trobeu la sèrie de Fourier de f i utilitzeu-la per a deduir el valor de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

GUIA DOCENT DE CÀLCUL.
(Graduat en Gestió Aeronàutica)

1. **IDENTIFICACIÓ DE L'ASSIGNATURA**

   Nom: Càlcul
   Codi: 101755
   Crèdits: 9 ECTS
   Tipus: Bàsica

2. **CONTEXTUALITZACIÓ i OBJECTIUS**

   Les assignatures de Càlcul, Estadística i Àlgebra Lineal formen un bloc que està pensat dins el Pla d'Estudis per a dotar l'alumne dels conceptes i eines matemàtiques necessàries per comprendre, desenvolupar i avaluar els processos de gestió dels diferents sistemes presents en el sector aeronàutic. Així mateix, es vol proporcionar a l'alumne el domini del llenguatge matemàtic bàsic per posteriorment poder afrontar la lectura de textos que pugui necessitar, tan a nivell acadèmic com professional.

   En aquesta assignatura cal que l'estudiant es familiaritzi amb la teoria de funcions d'una variable real i de vàries variables reals. També s'han d'assolir una colla d'objectius transversals, essent el primer de tots ells el desenvolupar l'habilitat de l'alumne per a resoldre problemes: des del planteig fins a la resolució (usant si cal algun manipulador algebraic). Esperem també que aprengui a justificar el perquè de les coses i valori la importància de fer les coses ben fetes i amb rigor.

3. **CONTINGUTS**

   1- Funcions reals de variable real
   - Números, funcions i gràfiques.
   - Funcions polinòmiques. Exponencials i logaritmes.
   - Funcions trigonomètriques.
   - Límits de funcions. Continuïtat. Extrems en un interval.
   - Derivació. Regla de la cadena. Derivades de funcions elementals.
   - Teorema del valor mitjà. Regla de l'Hôpital.
   - Representació gràfica de funcions. Problemes d'optimització.
   - Càlcul d'àrees. Integració. Propietats de la integral.
   - Teorema Fonamental del Càlcul. Càlcul de primitives.
   - Noció d'equació diferencial. Variables separades i lineals.

   2- Funcions reals de vàries variables reals.
   - Coordenades i vectors a l'espai.
   - Producte escalar de dos vectors i norma d'un vector. Noció de distància.
   - Funcions de diverses variables. Conjunts de nivell. Continuïtat.

- Derivades direccionals i parcials. Regla de la cadena.
- Pla tangent a una superfície.
- Extrems relatius. Criteri de les segones derivades parcials.
- Extrems condicionats. Mètode dels multiplicadors de Lagrange.

4. TEMPS DE DEDICACIÓ DE L'ALUMNE.

TIPUS D'ACTIVITAT	Descripció	Hores
ACTIVITATS PRESENCIALS	Classes de Teoria	39
	Classes de Problemes	27
	Activitats Supervisades	21
	Realització de proves parcials	4
	Realització d'examen final	4
ACTIVITATS NO PRESENCIALS	Estudiar Teoria	39
	Pensar i resoldre exercicis	54
	Ús d'ordinador	22
	Preparar proves parcials	12
	Preparar examen final	21
	TOTAL	243

5. CAPACITATS O DESTRESES A ADQUIRIR

Teòriques

- Entendre les nocions de límit d'una funció en un punt, límit en l'infinit i límits laterals.
- Entendre el concepte de funció contínua.
- Entendre la noció de funció inversa i les seves propietats pel que fa a la continuïtat o derivabilitat.
- Tenir clara la construcció de les funcions exponencial i logarítmica.
- Entendre el significat geomètric de funció derivable en un punt.
- Entendre els teoremes bàsics sobre derivació, és a dir, el Teorema de Rolle, el Teorema del valor mitjà i el Teorema del valor mitjà generalitzat.
- Entendre què vol dir que una funció sigui convexa i tenir clar el significat geomètric de la convexitat.
- Entendre el Teorema Fonamental del Càlcul.
- Saber que és una equació diferencial i que vol dir resoldre-la.
- Entendre la noció de derivada parcial.
- Entendre la noció de pla tangent al gràfic d'una funció.
- Saber distingir entre extrems locals i extrems absoluts.

Pràctiques

(Aquestes destreses s'han d'adquirir comptant amb l'ajut del manipulador algebraic Maple.)

- Saber resoldre inequacions.
- Conèixer i saber utilitzar les gràfiques i les propietats de les funcions elementals.
- Saber dibuixar e interpretar gràfiques de funcions d'una variable.
- Saber calcular límits d'una funció.
- Tenir certa habilitat en la utilització del teorema de Bolzano.
- Saber trobar màxims i mínims locals i absoluts de funcions d'una variable.
- Saber calcular límits de funcions amb la regla de l'Hôpital.
- Saber trobar primitives de funcions d'una variable.
- Saber plantejar i resoldre problemes que portin a la resolució d'una equació diferencial.
- Saber calcular les derivades succesives de funcions de diverses variables i saber emprar la regla de la cadena.
- Saber interpretar les corbes de nivell d'una funció de dues variables.
- Saber trobar màxims i mínims locals de funcions de diverses variables.
- Saber plantejar i resoldre problemes d'optimització amb restriccions d'igualtat.

6. **REQUISITS.**

Els propis d'haver cursat matemàtiques al Batxillerat.

7. **METODOLOGIA.**

Els 9 crèdits de l'assignatura es reparteixen en 3 crèdits el primer semestre i 6 durant el segon, és a dir, el segon semestre té doble càrrega docent respecte del primer. No obstant, l'esquema serà el mateix durant tot el curs acadèmic: Classes de Teoria, Classes de Problemes i Activitats Supervisades.

Durant les hores setmanals de classes de Classes de Teoria s'aniran desgranant els conceptes i enunciant els resultats importants (teoremes) que basteixen la teoria que anem introduint. No ens dedicarem a demostrar els teoremes ni els mètodes de resolució sinó que els mostrarem mitjançant exemples i exercicis. On sí caldrà introduir el rigor matemàtic és en l'aplicació dels mètodes i en la resolució d'exercicis.

L'alumne rebrà unes llistes d'exercicis i problemes sobre les que treballarem a les Classes de Problemes. Prèviament, durant la seva activitat no presencial, haurà llegit i pensat els exercicis i problemes proposats. D'aquesta manera es podrà garantir la seva participació a l'aula i es facilitarà l'assimilació dels continguts procedimentals. També, de forma periòdica haurà de lliurar la seva resolució per escrit.

A les classes d'Activitats Supervisades es treballaran temes complementaris i, si les condicions tècniques ho permeten, l'estudiant es familiaritzarà amb l'ús del manipulador algebraic Maple.

En moltes sessions (tant de teoria com de problemes) tenim la intenció d'usar l'ordinador per executar el Maple, que s'ha de considerar una eina habitual de l'assignatura.

Seguint les instruccions de la plana web www.addlink.es/maple-uab.asp podeu demanar que us enviin un CD per instal.lar el programa Maple al PC de casa vostra. Té un cost de 12 euros. No pagueu pas la llicència, això ja ho fa la UAB, sinó el CD i despeses d'enviament. Una altra manera d'aconseguir-ne una còpia legal és efectuar un còpia del disc que us proporcionarà el professor i després cada estudiant demanar per correu electrònic (cas@uab.cat) al Servei d'informàtica de la UAB una clau d'activació del programa. Aquesta petició al CAS s'ha de realitzar des del vostre compte de correu institucional de la UAB.
Com és natural, els estudiants disposaran d'hores de consulta al despatx del professor.

També s'usaran les eines que es considerin oportunes del Campus Virtual de la UAB, https://cv2008.uab.cat/

8. **AVALUACIÓ**

Es valorarà la participació de l'alumne a les classes de Teoria, classes de Problemes i Activitats Supervisades, així com els problemes lliurats per escrit. A partir d'aquesta valoració s'obtindrà una nota (sobre 10 punts) que anomenarem NP.

L'aprenentatge de les matemàtiques és un procès complex. És un procès a llarg terme; en cert sentit, hom no pot apreciar el significat del primer teorema fins que no ha après l'últim teorema. L'avaluació es farà amb un examen final (amb tota la matèria del programa), el qual consistirà principalment en la resolució de problemes, però també contindrà una part teòrica. La qualificació obtinguda donarà lloc a una nota (sobre 10) que anomenarem N-final. A més, hi haurà una prova escrita al final del primer semestre. Aquesta prova no elimina matèria i dóna lloc a una nota (sobre 10) que anomenarem N-parcial. A partir, de la nota parcial i la nota final s'obté la nota NV, definida segons la següent fórmula:

$$\text{NV} = 0.3 \cdot \text{N-parcial} + (1 - 0.03 \cdot \text{N-parcial}) \cdot \text{N-final}$$

Finalment, la nota de l'assignatura és:

$$\text{NP} \cdot 0.35 + \text{NV} \cdot 0.65$$

9. **BIBLIOGRAFIA**

El programa que presentem en aquesta assignatura està molt estandaritzat i és fàcil trobar llibres que el cobreixen en la seva totalitat. A mostra d'exemple:

E.J. Purcell, D. Varberg & S.E. Rigdon; Cálculo. *Pearson Educación de México, 2007. Novena Edició.*

Salas & Hille.; Calculus. Tomos 1 y 2 *Editorial Reverté, 1995.*

10. **PROFESSORAT**

Joan Orobitg, despatx C1/354, orobitg@mat.uab.cat

Curs 2009-2010

EXTREMS DE FUNCIONS

91. Trobeu els extrems i els punts de sella de les funcions següents:
    (a) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$; (b) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$;
    (c) $f(x,y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$; (d) $f(x,y) = e^x \sin y$;
    (e) $f(x,y) = yx^2 + y^3 - 4x^2$; (f) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 9x - 9y$.

92. Volem construir una caixa rectangular que contingui un volum de 12 litres. El preu per decímetre quadrat del material que s'utilitzarà és de 40 euros per al fons, 30 euros per als costats oposats i 20 euros per als altres costats. Trobeu les dimensions de la caixa per a les quals el cost és mínim.

93. Suposem que una muntanya té forma d'un paraboloide el.líptic $z = c - ax^2 - by^2$, on a, b i c són constants positives, x i y són les coordenades est-oest i nord-sud, i z és l'altitud sobre el nivell del mar (x , y i z estan mesurades en metres). En el punt $(1,1)$, en quina direcció està augmentant més ràpid l'altitud? Si es deixa anar una bola en $(1,1)$, en quina direcció començarà a rodar?

94. (a) Trobeu els extrems relatius i punts de sella de la funció:
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 - 4.$$
    (b) Considereu la superfície $z = f(x,y)$. Si us trobeu en el punt $(-1,1,-4)$, en quina direcció heu d'anar per descendre pel màxim pendent? Si en comptes de descendre volguéssiu mantenir la mateixa alçada, en quina direcció podríeu anar?

95. Determineu els extrems absoluts de les funcions següents restringides a les regions indicades:
    (a) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ a la recta $x + y = 1$ amb $x \geq 0$ i $y \geq 0$
    (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ a la recta $3x + 2y = 6$
    (c) $f(x,y) = x^2y + 12y^2 + 2xy$ a l'el·lipse $x^2 + 2x + 16y^2 = 9$
    (d) $f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2$ al pla $x + y + z = 1$

96. Trobeu el valor màxim de la funció $f(x,y) = x^2y(4 - x - y)$ en el triangle limitat per les rectes $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 6$.

97. Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x,y,z) = x + y + z$ restringida a la bola $\{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

98. Sigui $T(x,y) = 20 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ la funció que dóna la temperatura dels punts d'una planxa metàl·lica. Demostreu que la temperatura a tot punt del disc
$$D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$$
és superior a la temperatura a qualsevol punt de
$$R = \{(x,y) | x^2 - 8x + y^2 + 16 \leq \frac{1}{16}\}.$$

1. (a) Si $a \cdot b \neq 0$ simplifiqueu: (10 punts)

$$\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{2ab} - \frac{(a+b)^3+(a-b)^3}{a}$$

   (b) Resoleu la inequació $\dfrac{t+3}{t-8} \geq 0.$ (10 punts)

2. (a) Feu un esbós dels gràfics de les funcions: (5 punts)

$$y = x^2 + 2x - \frac{3}{2}, \qquad y = |x^2 + 2x - \frac{3}{2}|$$

   (b) Resoleu la inequació $|x^2 + 2x - \frac{3}{2}| \leq \frac{3}{2}$. (15 punts)

3. Determineu el domini de definició de cadascuna de les funcions següents: (20 punts)

$$\text{(a) } f(x) = \sqrt{\ln(\log_{10} x)} \qquad \text{(b) } g(x) = \frac{1}{\sin(x) - \cos(x)}$$

4. Calculeu els límits:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+x-1}{x^3+x^2+1}\right)^{3x}$ (10 punts)

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ (10 punts)

5. (a) Estudieu els intervals de creixement i de decreixement de la funció (10 punts)

$$f(x) = e^{x^2-2x+3}.$$

   (b) Raoneu quantes solucions té l'equació $f(x) = 10$. (10 punts)

Entregueu els exercicis en **fulls separats**.
Identifiqueu tots els fulls amb el vostre nom i cognoms a la part superior dreta.

Càlcul 101755 **Gestió Aeronàutica**

Final 23 de juny de 2010

1. Resoleu la inequació $x^3 - 4x \geq 0$. (15 punts)

2. Domini de definició de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Estudieu els intervals de monotonia de f. Determineu $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$ i $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$. Finalment, raoneu quantes solucions té l'equació $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{2e}$. (20 punts)

3. Trobeu la solució de l'equació diferencial $y' + 2ty = 0$ tal que $y(0) = 3$. (15 punts)

4. En la direcció del vector $w = (3, 4)$, calculeu la derivada direccional de la funció
$$f(x, y) = x + 2xy - 3x^2y$$
en el punt $(-\frac{1}{2}, 1)$. (10 punts)

Càlcul 101755 **Gestió Aeronàutica**

Final 2 23 de juny de 2010

5. Estudieu i classifiqueu els punts crítics de $g(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y - 2$. (20 punts)

6. Trobeu els extrems absoluts de la funció $h(x, y) = (x - y)^2$
sobre l'el·lipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. (20 punts)