

ALGUNS EXEMPLES D'EXERCICIS CARACTERÍSTICS

NOMBRES

- Introdueix dins l'arrel els factors externs a $2a^2b\sqrt[3]{3ab^2}$.
- Extreu de l'arrel tots els factors possibles a $\sqrt[4]{12800a^{10}b^{15}}$
- Calcula, simplifica, i si s'escau, racionalitza el resultat
 - $\sqrt{75} - 6\sqrt{27} + 4\sqrt{12}$
 - $(4\sqrt{5} - 2)^2$
 - $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}}$
 - $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[4]{a^3}$
 - $\sqrt{(a+b)^2 - 4ab} + \sqrt{(a-b)^2 + 4ab}$
 - $\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} - \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} + \frac{18}{\sqrt{27}}$
- Explica quina és la definició de $\sqrt{2}$. Demuestra que $\sqrt{2}$ és un número irracional.
- Digues tots els diferents tipus de nombres que coneixes i per què són necessaris.
 - Explica com passaries d'un nombre decimal finit a fracció.
 - Dona l'arrodoniment per excés i per defecte de $\sqrt{37}$ amb 1,2 i 3 xifres decimals. Digues, en cada cas, quina de les dues és la millor i perquè.

ÀLGEBRA

Polinomis

- Calcula el quocient i el residu de la divisió $(x^4 - 3x^3 + x^2 - 1) : (2x^2 - 1)$
- Fes les següents operacions i simplifica el resultat:
 - $\frac{x^2+1}{x^3-x} - \frac{1}{x+1}$
 - $\frac{x+10}{x^2-4} - \frac{x}{x+2} + \frac{2}{3x-6}$
 - $\frac{4x^2-8x+4}{x^2-1} : \frac{2x^2-18}{x^2+4x+3}$
- Descompon i troba les arrels de $P(x) = 6x^3 - 17x^2 + 6x + 8$

Equacions, inequacions

- Resol l'equació exponencial següent, explicant quines propietats apliques
$$2^{\frac{x-3}{2x}} \cdot 4^{-3} = 128$$
- Resol les inequacions següents: a) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$, b) $3x - 5 \geq 8x + 2$
- Resol les equacions següents:
 - $\log(x-2) + \log(x+3) = 2\log(x-1)$,
 - $2^{x+2} - 3 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{x-1} = 28$

- c) $\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$
 d) $\cos^2 x - \sin^2 x + \tan^2 x = 1$

Sistemes d'equacions

6. Digues què vol dir resoldre un sistema d'equacions amb 3 incògnites. Quins casos ens podem trobar pel que fa a resoldre un sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites? Posa un exemple de cada un d'ells (no cal que els resolguis, només cal que diguis per què succeeix cada cas).

7. Estudieu i resoleu, si és el cas, els sistemes següents:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 12 \\ y + z = 8 \\ x - z = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y + 6z = 0 \end{cases}$$

8. Considereu el sistema següent dependent del paràmetre m . Discutiu-lo i resoleu-lo en tots els casos.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ x + my + 5z = 2 \\ x + my + (m+3)z = 2 \end{cases}$$

9. Un sastre compra $15m$ de pany i $8m$ de tela, i paga 256,00 €. En una altra ocasió compra $30m$ de tela i torna $5m$ de pany, i paga 225,00 €. Quin és el preu de $1m$ de tela y $1m$ de pany?

10. Resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x^2 - y^2 + 2x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Matrius, determinants i espais vectorials.

11. Mitjançant el càlcul de determinants, deduiu la dependència o independència lineal dels vectors: $\vec{u} = (1, 3, 2)$, $\vec{v} = (-3, 1, -1)$, $\vec{w} = (1, 1, 1)$.

12. Aplicant determinants, calculeu el valor de m per tal que els vectors $(m, 3, 2)$, $(2, 0, m)$, i $(-3, 1, -1)$ siguin linealment independents. Expliciteu-ho bé.

13. Estudieu els rangs de les matrius A i B i determineu, en cada cas, quins vectors columna són linealment independents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

14. Donats els vectors $\vec{a} = (2, -2, 1)$, $\vec{b} = (3, 1, -4)$ i $\vec{c} = (1, 1, -3)$:

a) Calculeu $2\vec{a} - (3\vec{b} - 4\vec{c})$.

b) Trobeu el vector unitari en la direcció i sentit del vector \vec{a} .

d) Comproveu que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ és base de R^3 .

GEOMETRIA

Pla

1. Digues la condició que han de complir els pendents de dues rectes perpendiculars. Posa un exemple on es vegi el que has explicat.
2. Calcula l'equació de la recta paral·lela a $4x + 3y + 4 = 0$ que passa pel punt $A(3, -1)$.
3. Calcula l'equació de la recta que passa pels punts $A(2, 4)$ i $B(6, 1)$ i busca el valor de y perquè el punt $C(18, y)$ pertanyi a la recta.
4. Calcula l'angle que forma la recta $4x + 3y + 4 = 0$ amb l'eix de les abscisses i amb l'eix d'ordenades.
5. Estudia si les rectes $2x + y = 1$; $\{x = 5 - 2t, y = t\}$; i $2x + 3y = 7$ tenen o no un punt en comú a totes tres.
6. Calcula la distància del punt $A(0, -7)$ a la recta $y = 8x - 3$.
7. Donat el triangle de vèrtexs $A(2, -1)$, $B(-2, 3)$ i $C(-1, 5)$, calcula el seu perímetre i la seva àrea.
8. Determina el valor de k de manera que les rectes r i s d'equacions $r: kx + (k - 1)y - 2 = 0$ i $s: 3kx - (3k + 1)y + 5 = 0$ siguin paral·leles.
9. D'un triangle isòsceles en coneixem els vèrtexs corresponents al costat desigual $A(1, 2)$ i $B(5, 6)$ i també que el vèrtex C està sobre la recta $y = \frac{x}{3} - 1$.
Troba el vèrtex C .
10. D'un triangle ABC , rectangle en A , en coneixem l'àrea, $25 m^2$, el vèrtex $C(0, 8)$ i que el catet AB està sobre la recta $y = x - 2$. Troba'n els vèrtexs A i B . (Dues solucions).
11. Troba el centre i el radi de la circumferència d'equació $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 87 = 0$ i digues si els punts $(4, 7)$ i $(8, 11)$ són interiors, exteriors o pertanyen a la circumferència.
12. Digues quins són els casos que ens podem trobar com a posició relativa de dues circumferències. Fes els gràfics corresponents i escriu la condició que han de complir els radis r i r' i la distància d entre ells.
13. Tradueix a una equació la propietat següent: *la distància d'un punt $X(x, y)$ al punt $A(3, 0)$ és igual al doble de la distància del punt X al punt $B(6, 0)$* , i demostra que el conjunt de punts que compleixen aquesta propietat és una circumferència.
14. Calcula l'equació de la circumferència de centre $O(2, 3)$ tangent a la recta $3x - 4y - 9 = 0$.

Espai

15. Estudieu la posició relativa dels tres plans:

$$\pi_1: x - y + z + 1 = 0$$

$$\pi_2: -2x + 2y - 2z + 7 = 0$$

$$\pi_3: 3x - y + 4z = 0$$

16. Estudieu la posició relativa de les rectes r i s :

$$r: \begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ x - y + z = 7 \end{cases}$$

17.

- Calculeu l'àrea del triangle determinat pels punts d'intersecció del pla $3x + 2y - 4z + 24 = 0$ amb els eixos de coordenades.
 - Quin és el volum de la piràmide triangular definida pels punts anteriors i l'origen de coordenades?
18. Explica com calcularies l'equació del pla que passa per tres punts donats A , B i C que no estan alineats. Explica el raonament que fas.
19. Aplica el que has explicat per trobar l'equació del pla que passa pels punts $A(0,4,1)$, $B(1,-1,0)$ i $C(2,2,-2)$.

TRIGONOMETRIA

1. Sabent que $\sin a = \frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ i $\cos b = \frac{5}{13}$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$, calcula el VALOR

EXACTE de: $\sin(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin 2a$, $\cos \frac{b}{2}$.

- Per calcular la distància BC entre dos arbres que hi ha dins un llac hem mesurat les dades següents: ens hem situat a dos punts accessibles A i D des d'on podem mesurar la distància AD que és de $20m$. Hem col.locat el goniòmetre horitzontal al punt A i hem mesurat els angles $DAB = 65^\circ$ i $CAB = 20^\circ$. Hem col.locat el goniòmetre horitzontal al punt D i hem mesurat els angles $ADC = 100^\circ$ i $ADB = 60^\circ$.
 - Resol el problema numèricament de forma que s'entengui clarament tot allò que fas.
 - Resol el problema gràficament.
- Una persona que està resolent un problema de trigonometria ha aplicat unes fórmules i ha arribat a la conclusió que $\sin x = 2,89$, i ha continuat resolent el problema amb aquesta dada. Creus que el resultat que obtindrà serà correcte? Per què? Passaria el mateix si el que hagués trobat fos $\tan x = 2,89$. Per què? Explica els teus raonaments de la forma més completa possible.
- Troba els costats i els angles d'un triangle rectangle del qual en coneixem l'àrea: $15cm^2$ i la longitud de la mediana corresponent a la hipotenusa: $5cm$.

CÀLCUL

1. Calcula el domini de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{4-x}{x^2-4}$ b) $g(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-4}$

2. Essent $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$; $g(x) = x^2 + 1$; $h(x) = \frac{2}{x}$; calcula $g \circ g$; $h \circ g$ i f^{-1} .

3. Estudia la continuïtat de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^2-1} & x \leq 0 \\ \frac{x-4}{x+1} & 0 < x \end{cases}$$

4. Calcula el domini de la funció $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x+1}\right)$. Per a quin valor de x la funció

val 0?

5. Una colònia de bacteris té un creixement que duplica la seva població cada dia.
- a) Si en un moment donat hi ha aproximadament 1.500.000 bacteris, fes la taula de la funció que ens dona el nombre de bacteris segons els dies transcorreguts, busca la fórmula, fes el gràfic i calcula el nombre de bacteris que hi haurà després de 4,5 dies, de 6 dies, fa 4 dies i fa $3/4$ de dia (no directament amb la calculadora sinó aplicant abans les propietats de la funció exponencial).
- b) En quin moment hi haurà 48 milions de bacteris? Explica clarament com ho fas.
- c) Com podries calcular de tres maneres diferents el moment en que hi haurà 20,18 milions de bacteris? (un d'ells ha de ser amb logaritmes).
6. Una colònia de bacteris té un creixement exponencial però no sabem si duplica, triplica, quadruplica o la seva població cada dia. L'estudi comença observant una població amb 1 miler de bacteris aproximadament i es va veure que després de 8 dies hi havia 4096 milers de bacteris aproximadament. Busca la fórmula de creixement de la colònia de bacteris i digues com és el seu creixement.
7. Fes el croquis de la funció sinus. Digues el seu comportament: si és continua o no, on és creixent, on decreixent, on té màxims, on té mínims, on és positiva on s'anul·la, on és negativa. Fes el mateix per les funcions cosinus i tangent. (Atenció: aquest problema s'ha de contestar amb els angles expressats en radians).
8. Per què $x^3 + x^2 - 1$ té una arrel en l'interval $(0,1)$? Raoneu bé la resposta!
Calculeu un valor α , aproximant l'arrel fins a les centèsimes.
9. Considereu la funció polinòmica $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x$. Es demana:
- a) l'equació de la recta tangent a f en el punt $(0,0)$.
- b) Els seus extrems relatius i
- c) la concavitat i els punts d'inflexió de f .
10. Calculeu el punt de la corba $y = \frac{1}{1+x^2}$ en què la tangent té pendent màxim. Doneu també l'equació de la recta que és tangent en aquest punt.
11. Es consideren tots els rectangles del primer quadrant amb un vèrtex a l'origen, un costat sobre l'eix de les x , un altre sobre l'eix de les y i un vèrtex sobre la gràfica de la funció $f(x) = e^{-2x}$. Calculeu l'àrea del que tingui àrea màxima.

12. Donada la funció $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - d}$, calculeu els valors d' a, b, c i d sabent que f té una asímptota vertical en el punt d'abscissa $x = 1$, que la recta $y = 3x + 2$ n'és asímptota obliqua i que f té un màxim local en el punt d'abscissa $x = 0$.
13. Un home disposa de 300 m de filferro per tancar un camp de forma rectangular. Un dels costats del rectangle està davant del riu i no cal col·locar-hi valla de filferro. Busca les dimensions del camp d'àrea màxima que es podrà tancar.
14. La hipotenusa d'un triangle rectangle és de 9 cm . Determina les longituds que han de tenir els catets perquè el con generat en fer girar el triangle al voltant d'un dels catets tingui volum màxim.
15. Calculeu la derivada de les funcions següents:
- $y = x^4 + \sqrt[4]{x} + \frac{1}{x^4} + 4^x + \ln 4$,
 - $y = 2 \sin x + \sin^2 x + \sin x^2 + \sin^2 x^2$,
 - $y = e^{\tan x} + \tan e^x + \frac{1}{\tan x}$,
 - $y = \sqrt[3]{x}$,
 - $y = \ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$. (Aquesta simplifiqueu-la al màxim!)

INTEGRACIÓ

- Trobeu la primitiva de la funció $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}$, la gràfica de la qual talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, -4)$.
- Resoleu les integrals quasi-immediates següents:
 - $\int \frac{x^7 + 2x^2}{x^2} dx$;
 - $\int \frac{e^x}{x^2} dx$
 - $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 5}} dx$
 - $\int x \cos(1 - 2x^2) dx$
 - $\int (\cos^3 x + \cos x) dx$
- Trobeu les primitives següents pel mètode que s'indica: (no es fa en molts centres)
 - $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ (per parts);
 - $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ (canvi: $t = \sqrt{1 + x^2}$);
 - $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx$ (racional).
- Explica quin és el problema que apareix quan volem calcular l'àrea d'una zona del pla limitada per una línia corba i com l'hem pogut resoldre. Ajuda't de croquis i d'exemples per explicar-ho.
- Troba l'àrea limitada per les funcions $y = -x^2 + 4x$ i $y = x + 2$.