

EXEMPLES DE PROBLEMES

1. Creixement exponencial

Imagineu-vos que preneu un full de paper i el doblegueu pel mig unes quantes vegades

- a) Com podries estimar quin és el gruix d'un full?
- b) Suposem que el gruix és de 0.1 mm, calculeu quin és el gruix del plec després de doblegar-lo tantes vegades com s'indica en la taula

Nombre de doblecs: n	1	2	3	4	5
Gruix del plec en metres: g_n					

- c) Quin és el gruix del plec, en metres, després de doblegar-lo deu vegades.
- d) Sense calcular-ho, féu una conjectura (una suposició a ull) de quantes vegades creieu que s'hauria de doblegar el paper perquè el gruix superés 1 km (considereu que el full és prou gran com per poder-lo anar doblegant moltes vegades!)
- e) Calculeu els gruixos (en metres) fins que se superi el km. Organitzeu les dades en una taula com l'anterior.

Nombre de doblecs: n					
Gruix del plec en metres: g_n					

- f) Sense calcular-ho, féu una conjectura de quantes vegades creieu que s'hauria de doblegar el paper perquè el gruix superés la distància entre la Terra i la Lluna
- g) Amb ajut de la calculadora, investigueu quants doblecs caldria fer per superar la distància Terra - Lluna.
- h) A la pràctica, quantes vegades pots arribar a doblegar un full DIN A4?

En cada una de les situacions següents hi ha una quantitat subratllada. La qüestió és determinar en cada cas si aquesta quantitat es pot representar amb un model exponencial. En aquest cas donar la base de la potència.

- a) La pressió de l'aire en una pilota de tennis es redueix en 0.1 per cent cada vegada que treu un jugador que està practicant.
- b) Cada 200m d'alçada la temperatura de l'aire disminueix 1°C aproximadament.

- c) El soroll de fons d'un disc augmenta 0.05 per cent cada vegada que s'escolta en el tocadiscs.
- d) En submergir-se al mar, la pressió va augmentant amb la profunditat. Això és degut al fet que s'ha de suportar el pes de l'aigua que hi ha damunt nostre. L'augment de pressió és aproximadament d'una atmosfera cada 10 m de profunditat.
- e) Cada vegada que es fa servir, en una tintoreria, una màquina de rentar, cal purificar el líquid (per evaporació i condensació) i en aquest procés es perd un 2% de la quantitat de líquid.

2. Continuïtat

Discontinuitat de salt

Des d'un operador de telefonia mòbil ens ofereixen connexió a Internet amb el que ells anomenen la Banda Ampla Mòbil amb les següents condicions:

Els primers 5 MB de consum diari són gratuïts. Superats aquests 5 Mb de consum diari es factura segons les tarifes següents:

Consum fins a 5 MB/dia	0,00
Consum superior a 5 MB/dia i fins a 50 MB/dia	2,00
Consum superior a 50 MB/dia i fins a 500 MB/dia	8,00
Consum superior a 500 MB/dia	0,016 €/MB

- a) Dibuixeu el gràfic de la funció que ens dona el preu segons el consum diari que es faci?
- b) Podria ser que dos consums "quasi" iguals costessin diferent?.
- c) Escriu la fórmula de la funció.
- d) Quant pujarà el rebut mensual si s'ha connectat 11 dies i els consums diaris han estat de 33508, 2180, 5496, 12826, 79236, 9386, 4917, 1440, 17431, 60519 i 78236 KB.

Discontinuitat asimptòtica

Els científics Boyle (1627-1691) i Mariotte (1620-1684) van estudiar la relació entre la pressió d'un gas i el volum que ocupa quan la temperatura del gas es manté constant. Van arribar a la relació següent $P \cdot V = \text{constant}$.

Si tenim un mol de gas a la temperatura de 20 °C , aleshores la constant és 24,03 (P en atm. i V en l.).

- a) Estudia la funció $f: V \rightarrow P$ i fes-ne el gràfic.

- b) Què li passa a la pressió si el volum el fem més i més petit? Quin seria el $\lim_{V \rightarrow 0} f(V)$?

Discontinuitat evitable

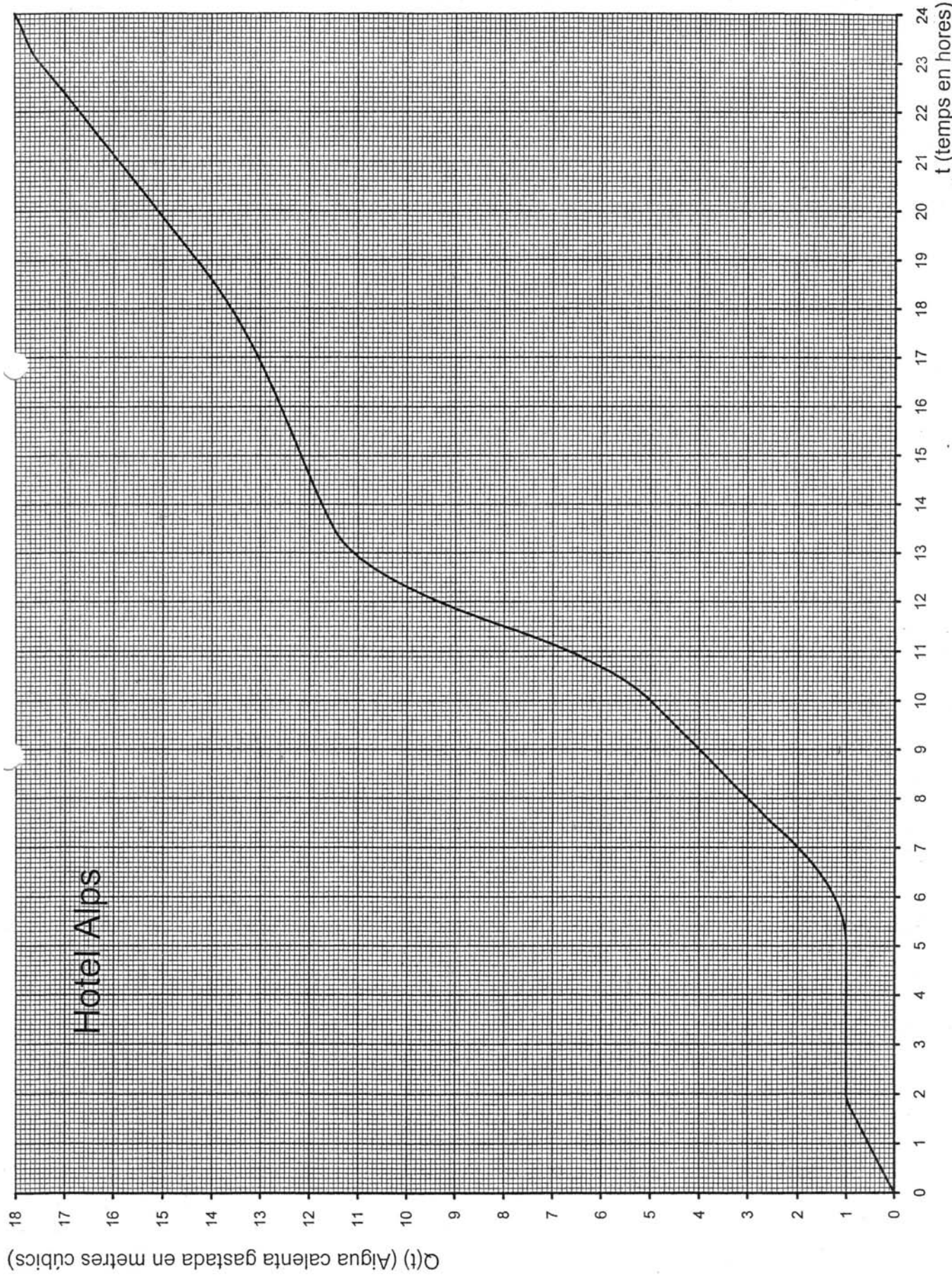
L'expressió $d(x) = 245 - 5x^2$ ens dona la distància aproximada a terra d'una pedra deixada caure des d'un edifici de 245 m. d'alçada on x és el temps des del moment que deixem caure.

- Si estem en una finestra a una alçada de 165 m., quant temps trigarà la pedra a passar davant nostre?
- Troba la velocitat mitjana de la pedra des de que fou llançada fins que la veiem, o des de que la veiem fins que arriba a terra. Troba-la també durant els 3, 2, 1, 0.1, segons abans que passi davant nostre, i també quan ja ha passat.
- Fes la representació gràfica de la funció $f(x)$ = velocitat mitjana de la pedra des de l'instant x fins el moment que passa davant nostre.
- Quin és el domini d'aquesta funció? Té sentit $f(4)$?
- En aproximar-se x a 4, a quin nombre s'aproximen els valors de la funció anterior? quin és, per tant $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$? Quin significat físic té aquest nombre?

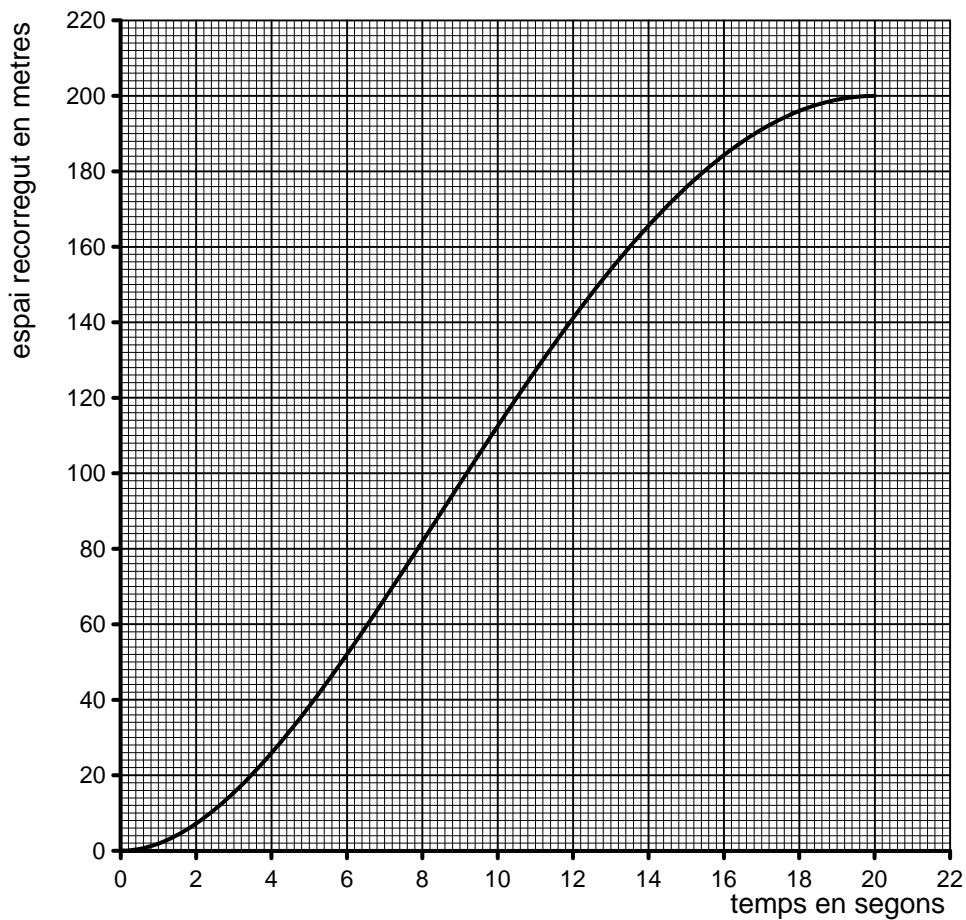
3. Derivades

L'hotel Alps té 156 habitacions. El seu consum d'aigua calenta és força elevat. La funció $Q: t \rightarrow Q(t)$ el gràfic de la qual adjuntem, ens dona el consum total d'aigua calenta des de mitjanit (0 h) fins a les t hores. Aquest gràfic correspon a un dia determinat, però s'ha observat que cada dia, durant la temporada d'estiu, es repeteix amb petites variacions.

- Quin és el total d'aigua calenta consumida al llarg del dia?
- Quina quantitat d'aigua s'ha consumit entre les 9 hores i les 15 h.
- Què podeu dir del consum d'aigua calenta entre les 2 i les 5 h.
- Què podeu dir del consum d'aigua entre les 20 i les 23 h.
- En quin moment s'està consumint més aigua, a les 13 h o a les 22 h? Justifiqueu la resposta.
- Trobeu el m^3/h que s'estan consumint a les 7 en punt. Expliqueu com ho feu.
- En quin moment del dia us sembla que s'està consumint més aigua calenta? Justifiqueu la resposta.



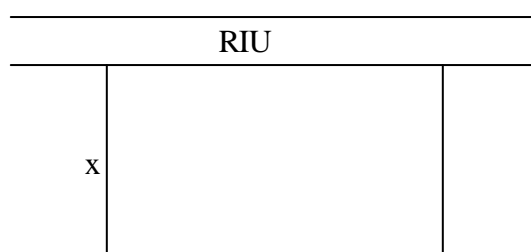
El gràfic següent representa el moviment d'un cotxe durant 20 segons. Explica el seu moviment: troba la velocitat instantània als instants 0 segons, 4 s, 10 s, 16 s i 20 s.



4. PROBLEMES D'OPTIMITZACIÓ

Un home té 100 m d'estacada per tancar tres costats d'un terreny rectangular, l'altre costa del qual és un riu. Vol fer-ho de manera que la superfície delimitada sigui màxima.

- a) Trobeu la fórmula que ens dona l'àrea (y) del terreny, segons la longitud d'un dels costats perpendiculars al riu (x).



b) Representeu gràficament aquesta funció.

c) Trobeu per quin valor de x , l'àrea delimitada és màxima.

S'ha fet un test a un nou model de cotxe per saber-ne quants quilòmetres pot fer, anant a velocitat constant, amb un litre de benzina. S'ha observat que per unes velocitats compreses entre 50 i 150 km/h, els quilòmetres recorreguts amb un litre de gasolina $D(x)$ a x km/h, es podia aproximar per la funció següent:

$$D(x) = -0.001x^2 + 0.2x + 10 \quad 50 \leq x \leq 150$$

a) Quants quilòmetres ha recorregut amb un litre de gasolina a 50 km/h?
I a 150 km/h?

b) A quina velocitat es fan el màxim de quilòmetres amb 1 litre de benzina? Quin és aquest màxim de quilòmetres?

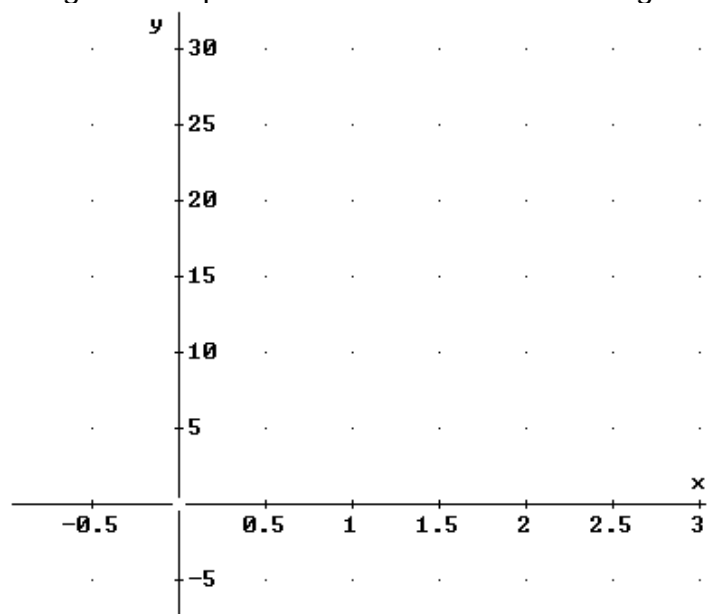
La densitat de població (nombre d'habitants per unitat de superfície) d'algunes ciutats depèn, en gran mesura, de la distància al centre de la població.

En una d'aquestes ciutats, hem trobat que, la densitat de població es pot aproximar per la funció:

$$y = -16x^2 + 32x + 9$$

on x ($x \geq 0$) és la distància al centre en quilòmetres i y la densitat de població en milers de persones per quilòmetre quadrat.

Amb el vèrtex i els punts de tall amb els eixos de coordenades, feu un esbós del gràfic d'aquesta funció i contesteu les següents preguntes:



- a) Quina és la densitat en el centre d'aquesta ciutat? I a 250 metres del centre?
- b) Per quin valor de x la densitat és màxima? Quin és en aquest cas el valor de la densitat de població?

5. Asímptotes

Un article té un preu inicial de P €. Ha sofert primer un augment d'un x per cent i després una rebaixa d'un y per cent (aplicat a la quantitat augmentada), de tal manera que el preu de l'article ha tornat al preu inicial de P €. Es compleix que:

$$y = \frac{100x}{x+100} \text{ per valors de } x > 0$$

És a dir si $x = 25$, $y = \frac{100 \cdot 25}{25+100} = 20$. Això vol dir que si augmentem una quantitat Q un 25 % i el resultat de l'augment el disminuïm en un 20 % tornem a obtenir la quantitat inicial Q .

- a) Calculeu quin tant per cent cal rebaixar el preu d'un article que ha augmentat en un 150 % per tornar-lo al preu inicial. Comproveu el resultat que heu obtingut. I si ha augmentat en un 900 %?
- b) Per quin valor de la x , no nul, es compleix que $y = \frac{1}{2}x$?
- c) Calculeu l'asímptota horitzontal d'aquesta funció. Doneu una interpretació del valor trobat, en relació a l'enunciat del problema.