Resum

La Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Suposem $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ fundió T-periòdica.
  Coeficients de Fourier: $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i2\pi\frac{k}{T}t}dt$.
- Prenc N **mostres equiespaiades**:
  $f_0 := f(0),\ f_1 := f(\frac{T}{N}),\ f_2 := f(2\frac{T}{N}),\ \dots,\ f_{N-1} := f((N-1)\frac{T}{N})$.
- Canviem la integral per un sumatori i definim, per $N = 4$:

$$\begin{array}{lllllllll}
F_0 & = & f_0 & + & f_1 & + & f_2 & + & f_3 \\
F_1 & = & f_0 & + & f_1 e^{-i2\pi\frac{1}{N}\cdot 1} & + & f_2 e^{-i2\pi\frac{1}{N}\cdot 2} & + & f_3 e^{-i2\pi\frac{1}{N}\cdot 3} \\
F_2 & = & f_0 & + & f_1 e^{-i2\pi\frac{2}{N}\cdot 1} & + & f_2 e^{-i2\pi\frac{2}{N}\cdot 2} & + & f_3 e^{-i2\pi\frac{2}{N}\cdot 3} \\
F_3 & = & f_0 & + & f_1 e^{-i2\pi\frac{3}{N}\cdot 1} & + & f_2 e^{-i2\pi\frac{3}{N}\cdot 2} & + & f_3 e^{-i2\pi\frac{3}{N}\cdot 3}
\end{array}$$

La Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Suposem $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ fundió T-periòdica.
  Coeficients de Fourier: $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt$.
- Prenc N **mostres equiespaiades**:
  $f_0 := f(0)$, $f_1 := f(\frac{T}{N})$, $f_2 := f(2\frac{T}{N})$, $\ldots$, $f_{N-1} := f((N-1)\frac{T}{N})$.
- Canviem la integral per un sumatori i definim:

$$F_k := \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2\pi \frac{k}{N} j}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Els $\{F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}\}$ són els
coeficients de la Transformada Discreta de Fourier (DFT).

La Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Suposem $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ fundió T-periòdica.
  Coeficients de Fourier: $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i2\pi\frac{k}{T}t}dt$.
- Prenc N **mostres equiespaiades**:
  $f_0 := f(0),\ f_1 := f(\frac{T}{N}),\ f_2 := f(2\frac{T}{N}),\ \ldots,\ f_{N-1} := f((N-1)\frac{T}{N})$.
- Canviem la integral per un sumatori i definim:

$$F_k := \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2\pi\frac{k}{N}j}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

  Els $\{F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}\}$ són els
  coeficients de la Transformada Discreta de Fourier (DFT).
- Per N prou (però no massa) gran, $\frac{1}{N}F_k \approx c_k$ **amb molta precisió**.

Càlcul de la DFT: la FFT

- Volem avaluar l'esforç computacional. Novament l'exemple $N = 4$:

$$\begin{array}{lcllllllll} F_0 & = & f_0 & + & f_1 & + & f_2 & + & f_3 \\ F_1 & = & f_0 & + & f_1 e^{-i2\pi\frac{1}{N}\cdot 1} & + & f_2 e^{-i2\pi\frac{1}{N}\cdot 3} & + & f_3 e^{-i2\pi\frac{1}{N}\cdot 3} \\ F_2 & = & f_0 & + & f_1 e^{-i2\pi\frac{2}{N}\cdot 1} & + & f_2 e^{-i2\pi\frac{2}{N}\cdot 2} & + & f_3 e^{-i2\pi\frac{2}{N}\cdot 3} \\ F_3 & = & f_0 & + & f_1 e^{-i2\pi\frac{3}{N}\cdot 1} & + & f_2 e^{-i2\pi\frac{3}{N}\cdot 2} & + & f_3 e^{-i2\pi\frac{3}{N}\cdot 3} \end{array}$$

Cal fer $\leq 6 \cdot 4 \cdot 4$ operacions.
Per N qualsevol, seran $6 \cdot N \cdot N$ ("el 6 no canvia").
Escrivim: $O(N^2)$ operacions ("de l'ordre de N^2").

Càlcul de la DFT: la FFT

- Volem avaluar l'esforç computacional.
- En principi cal fer $O(N^2)$ operacions.

Càlcul de la DFT: la FFT

- Volem avaluar l'esforç computacional.
- En principi cal fer $O(N^2)$ operacions.
- Hi ha una manera d'organitzar els càlculs, anomenada **Transformada Ràpida de Fourier (FFT)**, que redueix les operacions a $O(N \log_2 N)$.
- Introduïda a un article de Cooley i Tukey (1965), però **la idea es remunta a Gauss**.
- Ha suposat una **revolució en el processament digital de senyals**.
- Aplicacions: radar, obtenció d'imatges biomèdiques, espectroscopia, sistemes geofísics, radioastronomia, síntesi musical i moltes altres.
- El que acabo de fer fa una estona és **sintetitzar la meva veu**.

Estalvi d'operacions amb la FFT

La darrera columna de la taula següent és el factor pel què es divideix el temps de càlcul quan es fa FFT en lloc d'aplicar la definició directament.

N	N^2	$N \log_2 N$	$N^2/(N \log_2 N)$
10	100	33.2193	3.01
100	10000	664.386	15.05
1000	1e+06	9965.78	100.34
10000	1e+08	132877	752.57
100000	1e+10	1.66096e+06	6020.60
1e+06	1e+12	1.99316e+07	50171.67

50000 segons $>$ 833 hores $>$ 34 dies

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$F_k = f_0 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 0} + f_1 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 1} + f_2 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 2} + f_3 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 3} + f_4 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 4} + f_5 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 5} + f_6 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 6} + f_7 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 7}$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N=8$, per a $k=0,1,2,3,4,5,6,7$:

$$\begin{aligned} F_k = \quad & f_0 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 0} + f_2 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 2} + f_4 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 4} + f_6 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 6} \\ & + f_1 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 1} + f_3 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 3} + f_5 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 5} + f_7 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 7} \end{aligned}$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned} F_k = \quad & f_0 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 0} + f_2 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 2} + f_4 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 4} + f_6 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 6} \\ & + f_1 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 1} + f_3 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 3} + f_5 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 5} + f_7 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 7} \end{aligned}$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N=8$, per a $k=0,1,2,3,4,5,6,7$:

$$F_k = \quad f_0 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 0} + f_2 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 2} + f_4 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 4} + f_6 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 6}$$
$$+ f_1 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot(0+1)} + f_3 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot(2+1)} + f_5 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot(4+1)} + f_7 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot(6+1)}$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned} F_k = \quad & f_0 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 0} + f_2 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 2} + f_4 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 4} + f_6 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot 6} \\ & + f_1 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot (0+1)} + f_3 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot (2+1)} + f_5 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot (4+1)} + f_7 e^{-i2\pi \frac{k}{8} \cdot (6+1)} \end{aligned}$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0,1,2,3,4,5,6,7$:

$$\begin{aligned} F_k = \quad & f_0 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 0} + f_2 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 2} + f_4 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 4} + f_6 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 6} \\ & + e^{-i2\pi\frac{k}{8}}\left(f_1 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 0} + f_3 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 2} + f_5 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 4} + f_7 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 6}\right) \end{aligned}$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned} F_k = \quad & f_0 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 0} + f_2 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 2} + f_4 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 4} + f_6 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 6} \\ & + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \left(f_1 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 0} + f_3 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 2} + f_5 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 4} + f_7 e^{-i2\pi\frac{k}{8}\cdot 6} \right) \end{aligned}$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0,1,2,3,4,5,6,7$:

$$\begin{aligned} F_k = \quad & f_0 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 0} + f_2 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 1} + f_4 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 2} + f_6 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 3} \\ & + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \left(f_1 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 0} + f_3 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 1} + f_5 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 2} + f_7 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 3} \right) \end{aligned}$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$F_k = \underbrace{f_0 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 0} + f_2 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 1} + f_4 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 2} + f_6 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 3}}_{\text{Coef. } k \text{ transf. 4 punts de les mostres parelles}}$$

$$+ e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \Big(\underbrace{f_1 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 0} + f_3 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 1} + f_5 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 2} + f_7 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 3}}_{\text{Coef. } k \text{ transf. 4 punts de les mostres senars}} \Big)$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$F_k = \underbrace{f_0 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 0} + f_2 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 1} + f_4 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 2} + f_6 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 3}}_{=:F_k^p}$$

$$+ e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \Big(\underbrace{f_1 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 0} + f_3 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 1} + f_5 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 2} + f_7 e^{-i2\pi\frac{k}{4}\cdot 3}}_{=:F_k^s} \Big)$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$F_k = F_k^p + e^{-i2\pi \frac{k}{8}} F_k^s$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$F_k = F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned} F_k &= F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s \\ &= \left(F_k^{pp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ps}\right) + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \left(F_k^{sp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ss}\right) \end{aligned}$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned} F_k &= F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s \\ &= \left(F_k^{pp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ps}\right) + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \left(F_k^{sp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ss}\right) \end{aligned}$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$
\begin{aligned}
F_k &= F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s \\
&= (F_k^{pp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} (F_k^{sp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ss}) \\
&= \left((F_k^{ppp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F_k^{pps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{psp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{pss}) \right) \\
&\quad e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \left((F_k^{spp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{ssp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sss}) \right)
\end{aligned}
$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$
\begin{aligned}
F_k &= F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s \\
&= \left(F_k^{pp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ps}\right) + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \left(F_k^{sp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ss}\right) \\
&= \Big(\left(F_k^{ppp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F_k^{pps}\right) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} \left(F_k^{psp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} {\color{blue}F^{pss}}\right)\Big) \\
&\quad e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \Big(\left(F_k^{spp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sps}\right) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} \left(F_k^{ssp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sss}\right)\Big)
\end{aligned}
$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0,1,2,3,4,5,6,7$:

$$
\begin{aligned}
F_k &= F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s \\
&= (F_k^{pp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} (F_k^{sp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ss}) \\
&= \Big((F_k^{ppp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F_k^{pps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{psp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{pss}) \Big) \\
&\quad e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \Big((F_k^{spp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{ssp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sss}) \Big)
\end{aligned}
$$

$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0,1,2,3,4,5,6,7$:

$$\begin{aligned}
F_k &= F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s \\
&= (F_k^{pp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} (F_k^{sp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ss}) \\
&= \Big((F_k^{ppp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F_k^{pps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{psp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{pss}) \Big) \\
&\quad e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \Big((F_k^{spp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{ssp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sss}) \Big)
\end{aligned}$$

$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$

$\xrightarrow{p} f_0 \quad f_2 \quad f_4 \quad f_6$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned}
F_k &= F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s \\
&= (F_k^{pp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} (F_k^{sp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ss}) \\
&= \Big((F_k^{ppp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F_k^{pps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{psp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{pss}) \Big) \\
&\quad e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \Big((F_k^{spp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{ssp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sss}) \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llllllll}
f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7
\end{array}$$

$$\xrightarrow{p} f_0 \quad f_2 \quad f_4 \quad f_6$$

$$\xrightarrow{ps} f_2 \quad f_6$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned}
F_k &= F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s \\
&= (F_k^{pp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} (F_k^{sp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ss}) \\
&= \Big((F_k^{ppp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F_k^{pps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{psp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{pss}) \Big) \\
&\quad e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \Big((F_k^{spp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{ssp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sss}) \Big)
\end{aligned}$$

$$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7$$

$$\xrightarrow{p} f_0 \quad f_2 \quad f_4 \quad f_6$$

$$\xrightarrow{ps} f_2 \quad f_6$$

$$\xrightarrow{pss} f_6$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$:

$$
\begin{aligned}
F_k &= F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s \\
&= (F_k^{pp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} (F_k^{sp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ss}) \\
&= \left((F_k^{ppp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F_k^{pps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{psp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{pss}) \right) \\
&\quad e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \left((F_k^{spp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{ssp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sss}) \right) \\
&= \left((F_k^{ppp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F_k^{pps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{psp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} f_6) \right) \\
&\quad e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \left((F_k^{spp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{ssp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sss}) \right)
\end{aligned}
$$

Com es calula la FFT?

Cascada de transformades

Suposant $N = 8$, per a $k = 0,1,2,3,4,5,6,7$:

$$
\begin{aligned}
F_k &= F_k^p + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} F_k^s \\
&= (F_k^{pp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{8}} (F_k^{sp} + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} F_k^{ss}) \\
&= \Big((F_k^{ppp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F_k^{pps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{psp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{pss}) \Big) \\
&\quad e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \Big((F_k^{spp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sps}) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (F_k^{ssp} + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} F^{sss}) \Big) \\
&= \Big((f_0 + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} f_4) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (f_2 + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} f_6) \Big) \\
&\quad e^{-i2\pi\frac{k}{8}} \Big((f_1 + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} f_5) + e^{-i2\pi\frac{k}{4}} (f_3 + e^{-i2\pi\frac{k}{2}} f_7) \Big)
\end{aligned}
$$

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

f_0			
f_4			
f_2			
f_6			
f_1			
f_5			
f_3			
f_7			

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$			
$f_4 = F_0^{pps}$			
$f_2 = F_0^{psp}$			
$f_6 = F_0^{pss}$			
$f_1 = F_0^{spp}$			
$f_5 = F_0^{sps}$			
$f_3 = F_0^{ssp}$			
$f_7 = F_0^{sss}$			

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}		
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}		
$f_2 = F_0^{psp}$			
$f_6 = F_0^{pss}$			
$f_1 = F_0^{spp}$			
$f_5 = F_0^{sps}$			
$f_3 = F_0^{ssp}$			
$f_7 = F_0^{sss}$			

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}		
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}		
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}		
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}		
$f_1 = F_0^{spp}$			
$f_5 = F_0^{sps}$			
$f_3 = F_0^{ssp}$			
$f_7 = F_0^{sss}$			

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}		
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}		
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}		
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}		
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}		
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}		
$f_3 = F_0^{ssp}$			
$f_7 = F_0^{sss}$			

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}		
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}		
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}		
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}		
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}		
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}		
$f_3 = F_0^{ssp}$	F_0^{ss}		
$f_7 = F_0^{sss}$	F_1^{ss}		

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}	F_0^{p}	
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}		
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}	F_2^{p}	
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}		
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}		
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}		
$f_3 = F_0^{ssp}$	F_0^{ss}		
$f_7 = F_0^{sss}$	F_1^{ss}		

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}	F_0^{p}	
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}	F_1^{p}	
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}	F_2^{p}	
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}	F_3^{p}	
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}		
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}		
$f_3 = F_0^{ssp}$	F_0^{ss}		
$f_7 = F_0^{sss}$	F_1^{ss}		

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}	F_0^{p}	
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}	F_1^{p}	
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}	F_2^{p}	
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}	F_3^{p}	
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}	F_0^{s}	
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}		
$f_3 = F_0^{ssp}$	F_0^{ss}	F_2^{s}	
$f_7 = F_0^{sss}$	F_1^{ss}		

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}	F_0^{p}	
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}	F_1^{p}	
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}	F_2^{p}	
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}	F_3^{p}	
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}	F_0^{s}	
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}	F_1^{s}	
$f_3 = F_0^{ssp}$	F_0^{ss}	F_2^{s}	
$f_7 = F_0^{sss}$	F_1^{ss}	F_3^{s}	

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}	F_0^{p}	F_0
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}	F_1^{p}	
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}	F_2^{p}	
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}	F_3^{p}	
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}	F_0^{s}	F_4
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}	F_1^{s}	
$f_3 = F_0^{ssp}$	F_0^{ss}	F_2^{s}	
$f_7 = F_0^{sss}$	F_1^{ss}	F_3^{s}	

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}	F_0^p	F_0
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}	F_1^p	F_1
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}	F_2^p	
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}	F_3^p	
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}	F_0^s	F_4
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}	F_1^s	F_5
$f_3 = F_0^{ssp}$	F_0^{ss}	F_2^s	
$f_7 = F_0^{sss}$	F_1^{ss}	F_3^s	

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}	F_0^{p}	F_0
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}	F_1^{p}	F_1
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}	F_2^{p}	F_2
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}	F_3^{p}	
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}	F_0^{s}	F_4
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}	F_1^{s}	F_5
$f_3 = F_0^{ssp}$	F_0^{ss}	F_2^{s}	F_6
$f_7 = F_0^{sss}$	F_1^{ss}	F_3^{s}	

Com es calcula la FFT?
Organització dels càlculs

$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}	F_0^{p}	F_0
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}	F_1^{p}	F_1
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}	F_2^{p}	F_2
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}	F_3^{p}	F_3
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}	F_0^{s}	F_4
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}	F_1^{s}	F_5
$f_3 = F_0^{ssp}$	F_0^{ss}	F_2^{s}	F_6
$f_7 = F_0^{sss}$	F_1^{ss}	F_3^{s}	F_7

Com es calcula la FFT?

Organització dels càlculs

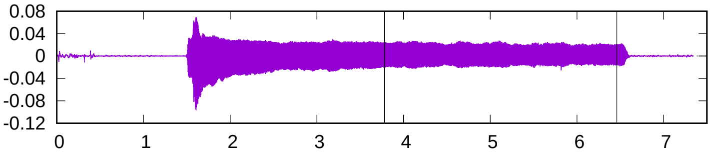
$f_0 = F_0^{ppp}$	F_0^{pp}	F_0^{p}	F_0
$f_4 = F_0^{pps}$	F_1^{pp}	F_1^{p}	F_1
$f_2 = F_0^{psp}$	F_0^{ps}	F_2^{p}	F_2
$f_6 = F_0^{pss}$	F_1^{ps}	F_3^{p}	F_3
$f_1 = F_0^{spp}$	F_0^{sp}	F_0^{s}	F_4
$f_5 = F_0^{sps}$	F_1^{sp}	F_1^{s}	F_5
$f_3 = F_0^{ssp}$	F_0^{ss}	F_2^{s}	F_6
$f_7 = F_0^{sss}$	F_1^{ss}	F_3^{s}	F_7

Per a N qualsevol, s'hauran de calcular $\log_2 N$ columnes
$\Longrightarrow$ El nombre total d'operacions és $O(N \log_2 N)$.

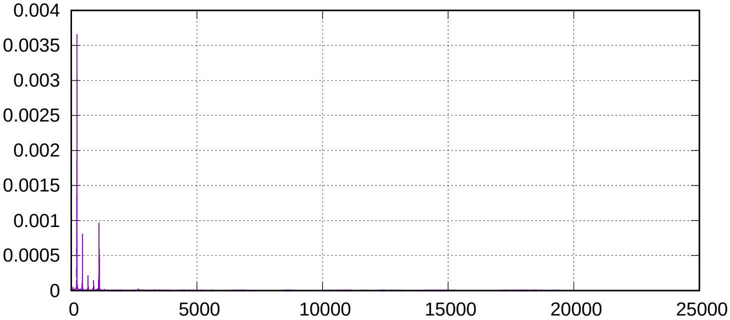
Com he obtingut la sèrie de Fourier de la meva veu?

- Si f és suma de termes de la forma $ae^{i2\pi\omega t}$:
  Al mòdul de la seva DFT, cadascun d'aquests termes dóna un **pic** a k/T, on $k/T \approx \omega$, d'alçada $|F_k|$.
- Per tant, una manera de buscar els coeficients de Fourier d'una funció periòdica és **cercar pics del mòdul de la DFT**. La posició dels pics ens dona les freqüències $\Longrightarrow$ no cal que sabem el període.
- Aquesta és una manera de cercar freqüències a senyals periòdics, quasi-periòdics, casi-periòdics o aproximadament d'un d'aquests tipus.
  És molt habitual a les ciències experimentals.

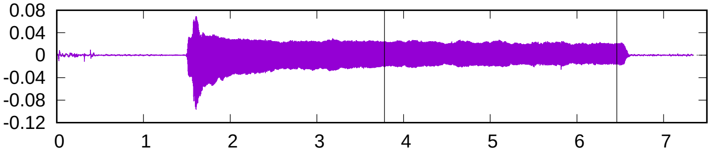
Cerca de pics



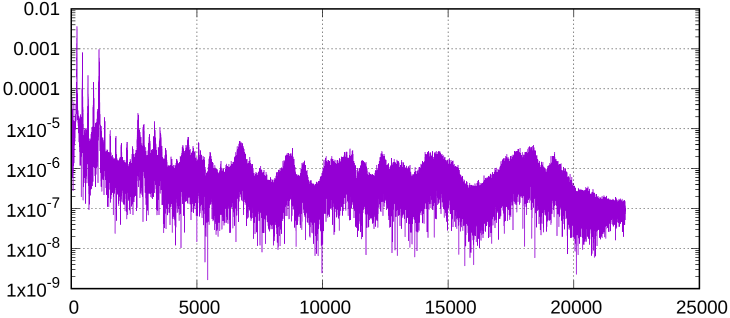
$$N = 118189, \;\; T = 6.46 - 3.78 = 2.68 \text{ (segons)}$$



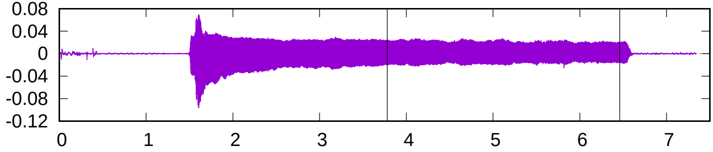
Cerca de pics



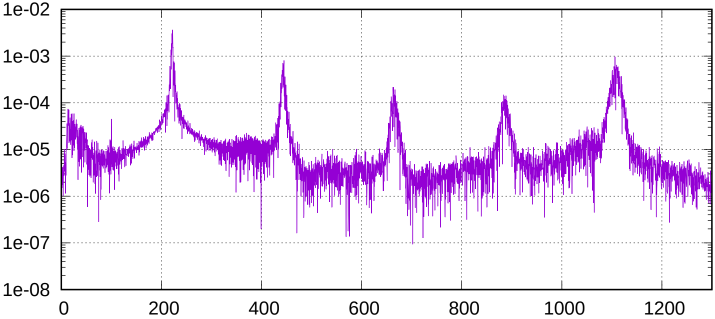
$N = 118189, \ T = 6.46 - 3.78 = 2.68$ (segons)



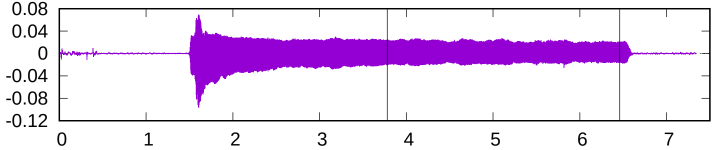
Cerca de pics



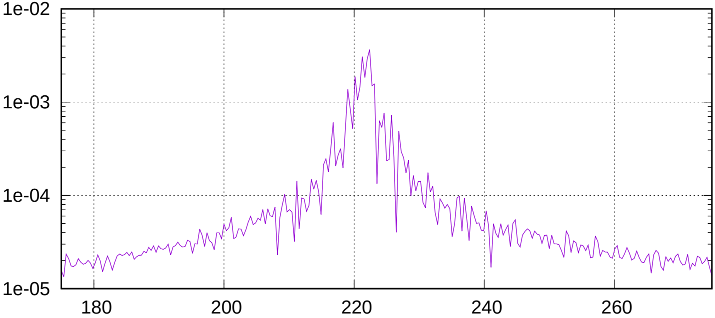
$N = 118189, \ T = 6.46 - 3.78 = 2.68$ (segons)



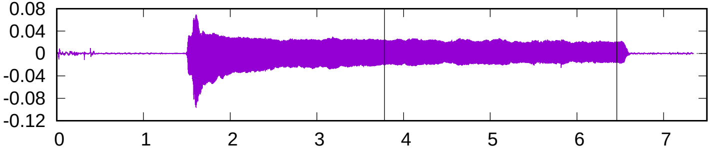
Cerca de pics



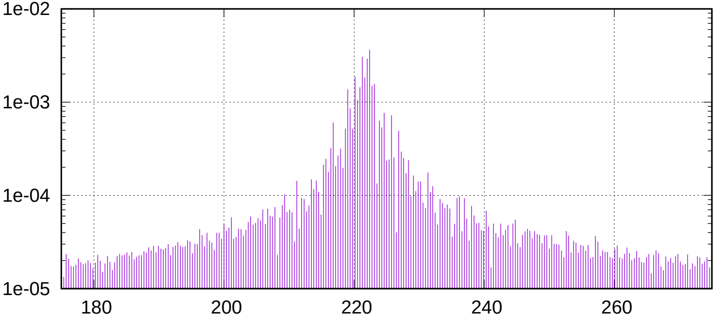
$N = 118189, \;\; T = 6.46 - 3.78 = 2.68$ (segons)



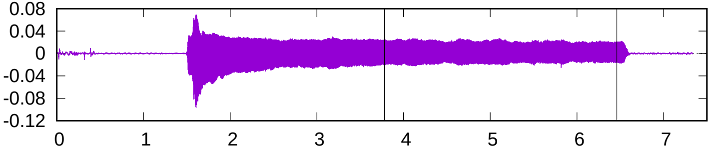
Cerca de pics



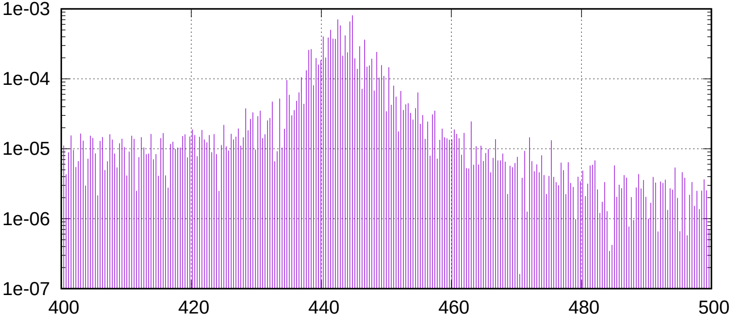
$N = 118189, \;\; T = 6.46 - 3.78 = 2.68$ (segons)



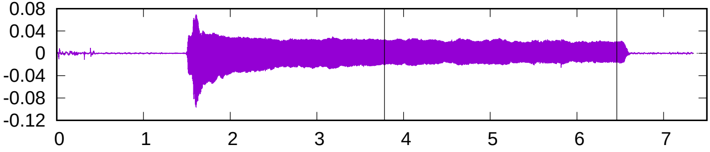
Cerca de pics



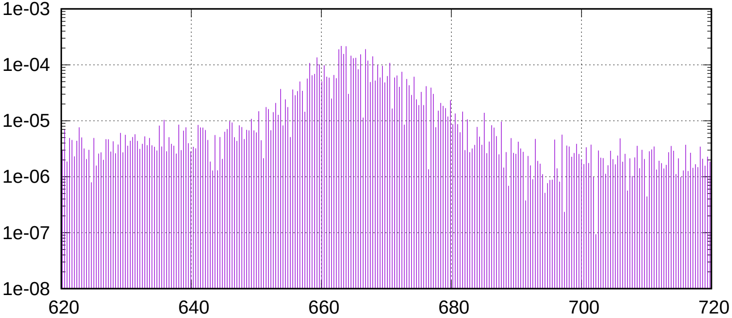
$N = 118189, \; T = 6.46 - 3.78 = 2.68$ (segons)



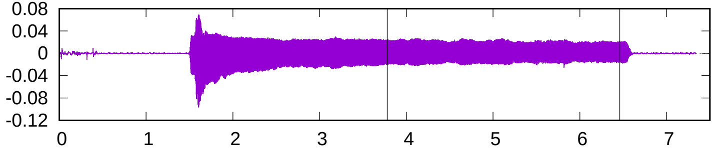
Cerca de pics



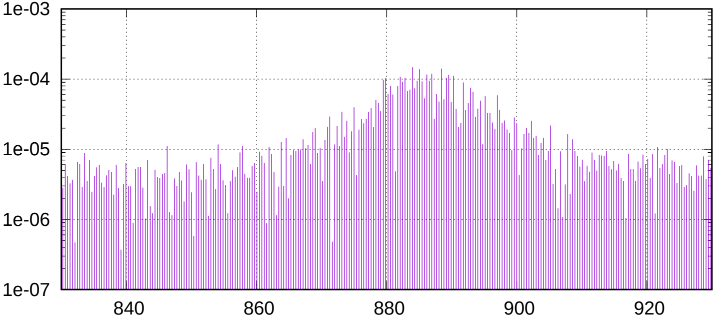
$N = 118189, \ T = 6.46 - 3.78 = 2.68$ (segons)



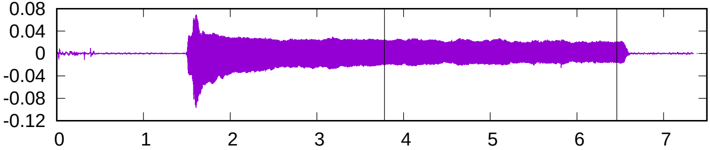
Cerca de pics



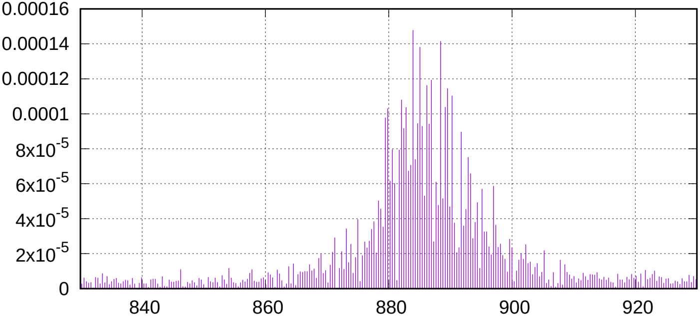
$N = 118189, \;\; T = 6.46 - 3.78 = 2.68$ (segons)



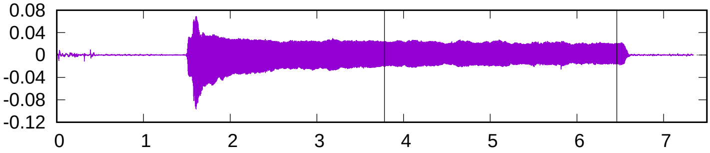
Cerca de pics



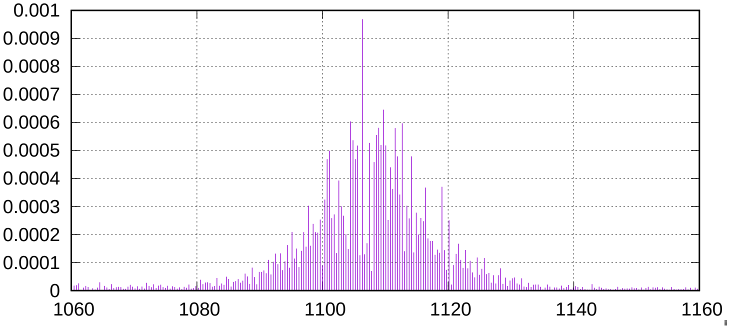
$N = 118189, \ \ T = 6.46 - 3.78 = 2.68$ (segons)



Cerca de pics



$N = 118189, \;\; T = 6.46 - 3.78 = 2.68$ (segons)



Ús de la DFT com a filtre

- La FFT tant permet "fer" com "desfer" una DFT:

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2\pi \frac{k}{N} j}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{1}$$

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_j e^{i2\pi \frac{k}{N} j}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2}$$

- Així es pot fer servir la DFT com a **filtre**: donat un so, es fa (1), es fa $F_k = 0$ per a alguns k, i es fa (2). Així, hem **eliminat freqüències del so**.
- Això es fa quan s'envien sons per telèfon: s'eliminen les freqüències per sobre de 3200 Hz (**low-pass filter**). Així es poden rebaixar la **freqüència de mostreig** i els **bits per mostra**. A costa de la qualitat del so (tot mantenint-la acceptable per a una conversa), es redueix considerablement la quantitat d'informació a enviar.
- Farem un exemple al taller.

Resum

Conclusions

1. Quan escoltem música, comptem, tant amb les durades com amb les altures (intervals).

Conclusions

1. Quan escoltem música, comptem, tant amb les durades com amb les altures (intervals).
2. La nostra pecepció de la freqüència és logarítmica.

Conclusions

1. Quan escoltem música, comptem, tant amb les durades com amb les altures (intervals).
2. La nostra pecepció de la freqüència és logarítmica.
3. No n'em parlat, però la del volum també ho és (i per això es mesura en decibels).

Conclusions

1. Quan escoltem música, comptem, tant amb les durades com amb les altures (intervals).
2. La nostra pecepció de la freqüència és logarítmica.
3. No n'em parlat, però la del volum també ho és (i per això es mesura en decibels).
4. El so ve determinat per la funció d'ona, . . .

Conclusions

1. Quan escoltem música, comptem, tant amb les durades com amb les altures (intervals).
2. La nostra pecepció de la freqüència és logarítmica.
3. No n'em parlat, però la del volum també ho és (i per això es mesura en decibels).
4. El so ve determinat per la funció d'ona, ...
5. ... però el timbre ve determinat per l'amplitud relativa dels diferents harmònics.

   $\Longrightarrow$ la nostra oïda es una super-analitzadora de Fourier.

Conclusions

1. Quan escoltem música, comptem, tant amb les durades com amb les altures (intervals).
2. La nostra pecepció de la freqüència és logarítmica.
3. No n'em parlat, però la del volum també ho és (i per això es mesura en decibels).
4. El so ve determinat per la funció d'ona, ...
5. ... però el timbre ve determinat per l'amplitud relativa dels diferents harmònics.
   $\Longrightarrow$ la nostra oïda es una super-analitzadora de Fourier.
6. La DFT i la FFT ens permeten manipular el so de manera digital.

Música emprada

- *Marxa Radetzky*, de Johann Strauss pare (1848): https://www.youtube.com/watch?v=8_2oDRiLYlc
- *Danubi Blau*, de Johann Strauss fill (1867): https://www.youtube.com/watch?v=RVqzSMJOyfc&t=130
- *Music sessions #53*, de Shakira (2024): https://www.youtube.com/watch?v=_mPp7M7PxBg
- *Sonata Clar de Lluna*, de Beethoven: https://www.youtube.com/watch?v=GXjhc8EbY4I&t=560
- *Since I don't have you*, de Guns N' Roses (1993): https://www.youtube.com/watch?v=IYOYlqOitDA
- Simfonia núm 6 de Tchaikovsky ("Patètica", 1893): https://www.youtube.com/watch?v=SVnF3x44rvU&t=1276
- *Mission: Impossible*, de Lalo Schifrin (1967): https://www.youtube.com/watch?v=tGSUjuSBt1A
- *Barstool Warrior*, de Dream Theater (2019): https://www.youtube.com/watch?v=x9b-Qc8e_vk
- *Scheherazade*, de Rimsky-Korsakov (1888): https://www.youtube.com/watch?v=6exoB7IW8qw&t=1346