

Música, so i matemàtiques

Josep Maria Mondelo¹

¹Universitat Autònoma de Barcelona

Dissabtes de les Matemàtiques UAB,
Bellaterra, 22 de març de 2025































Resum



- 1 Comptar els temps
- 2 Comptar intervals
- 3 Pitàgoras i l'origen de les notes, les escales i els intervals
- 4 Fourier i el timbre
- 5 La FFT de Cooley-Tukey i la revolució computacional
- 6 Conclusions

Resum

- 1 Comptar els temps
- 2 Comptar intervals
- 3 Pitàgoras i l'origen de les notes, les escales i els intervals
- 4 Fourier i el timbre
- 5 La FFT de Cooley-Tukey i la revolució computacional
- 6 Conclusions

Les figures musicals i els compassos

Figura	id	Català	Anglès
	1	Rodona	Whole note
 	2	Blanca	Half note
   	4	Negra	Quarter note
       	8	Corxera	Eighth note
              	16	Semicorxera	Sixteenth note

- En música, el **temps** (“beat”) és el que marcaríem amb el peu quan escoltem una cançó.
El **compàs** (“bar” o “measure”) és l’agrupació de temps d’acord amb la qual entenem el ritme de la cançó.
- El **compàs** (“time signature”) és una “fracció sense ratlla” $\frac{p}{q}$, que indica que cada compàs (“measure”) conté p figures de tipus q .
- Per exemple: en $\frac{3}{4}$ cada compàs té 3 negres ();
en $\frac{9}{8}$ cada compàs té 9 corxeres ().

Exemples

- Compàs $\frac{2}{4}$: marxes, polkes.
P.ex., la *Marxa Radetzky*, de Johann Strauss pare (1848).

Exemples

- Compàs $\frac{2}{4}$: marxes, polkes.
P.ex., la *Marxa Radetzky*, de Johann Strauss pare (1848).
- Compàs $\frac{3}{4}$: minuets, valsos.
P.ex., el *Danubi Blau*, de Johann Strauss fill (1867).

Exemples

- Compàs $\frac{2}{4}$: marxes, polkes.
P.ex., la *Marxa Radetzky*, de Johann Strauss pare (1848).
- Compàs $\frac{3}{4}$: minuets, valsos.
P.ex., el *Danubi Blau*, de Johann Strauss fill (1867).
- Compàs $\frac{4}{4}$: (casi) tota la música pop, i molta música clàssica.
P.ex. *Music sessions #53*, de Shakira (2024),
3r moviment de la *Sonata Clar de Lluna*, de Beethoven (1801).

Exemples

- Compàs $\frac{2}{4}$: marxes, polkes.
P.ex., la *Marxa Radetzky*, de Johann Strauss pare (1848).
- Compàs $\frac{3}{4}$: minuets, valsos.
P.ex., el *Danubi Blau*, de Johann Strauss fill (1867).
- Compàs $\frac{4}{4}$: (casi) tota la música pop, i molta música clàssica.
P.ex. *Music sessions #53*, de Shakira (2024),
3r moviment de la *Sonata Clar de Lluna*, de Beethoven (1801).
- Compàs $\frac{6}{8}$: algunes balades rock.
P.ex. *Since I don't have you*, de Guns N' Roses (1993).

Exemples

- Compàs $\frac{2}{4}$: marxes, polkes.
P.ex., la *Marxa Radetzky*, de Johann Strauss pare (1848).
- Compàs $\frac{3}{4}$: minuets, valsos.
P.ex., el *Danubi Blau*, de Johann Strauss fill (1867).
- Compàs $\frac{4}{4}$: (casi) tota la música pop, i molta música clàssica.
P.ex. *Music sessions #53*, de Shakira (2024),
3r moviment de la *Sonata Clar de Lluna*, de Beethoven (1801).
- Compàs $\frac{6}{8}$: algunes balades rock.
P.ex. *Since I don't have you*, de Guns N' Roses (1993).
- Compàs $\frac{5}{4}$: és difícil!
Música clàssica: Simfonia núm 6 de Tchaikovsky ("Patètica", 1893).
Cinema d'acció: *Mission: Impossible*, de Lalo Schifrin (1967).

Exemples

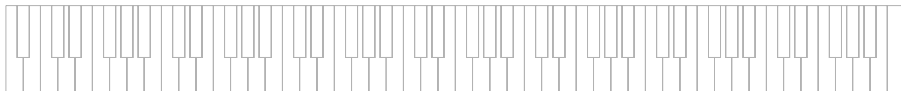
- Compàs $\frac{2}{4}$: marxes, polkes.
P.ex., la *Marxa Radetzky*, de Johann Strauss pare (1848).
- Compàs $\frac{3}{4}$: minuets, valsos.
P.ex., el *Danubi Blau*, de Johann Strauss fill (1867).
- Compàs $\frac{4}{4}$: (casi) tota la música pop, i molta música clàssica.
P.ex. *Music sessions #53*, de Shakira (2024),
3r moviment de la *Sonata Clar de Lluna*, de Beethoven (1801).
- Compàs $\frac{6}{8}$: algunes balades rock.
P.ex. *Since I don't have you*, de Guns N' Roses (1993).
- Compàs $\frac{5}{4}$: és difícil!
Música clàssica: Simfonia núm 6 de Tchaikovsky ("Patètica", 1893).
Cinema d'acció: *Mission: Impossible*, de Lalo Schifrin (1967).
- Compàs $\frac{7}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{4}{16}$: Dream Theater (metal progressiu).
P.ex., *Barstool Warrior* (2019).

Resum

- 1 Comptar els temps
- 2 Comptar intervals**
- 3 Pitàgoras i l'origen de les notes, les escales i els intervals
- 4 Fourier i el timbre
- 5 La FFT de Cooley-Tukey i la revolució computacional
- 6 Conclusions

Les notes musicals

Teclat de piano standard de 88 tecler:



Les notes musicals

Teclat de piano standard de 88 tecler:



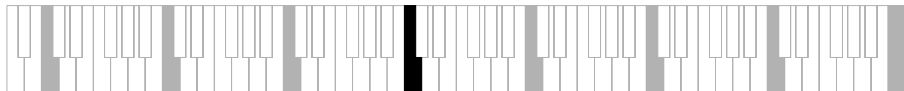
Marcats d'esquerra a dreta: Do 1, Do 2, Do 3, **Do 4**, Do 5, Do 6, Do 7, Do 8.

Tecler consecutives corresponen a notes consecutives.

L'**interval** entre dues notes consecutives és **un semitó**.

Les notes musicals

Teclat de piano standard de 88 tecler:



Marcats d'esquerra a dreta: Do 1, Do 2, Do 3, **Do 4**, Do 5, Do 6, Do 7, Do 8.

Tecles consecutives corresponen a notes consecutives.

L'**interval** entre dues notes consecutives és **un semitó**.

Per exemple, començant al Do 4, la nota de cada tecla i el nombre de semitons des del Do 4 són:

	1	3		6	8	10		
	Do#	Re#		Fa#	Sol#	La#		
	Reb	Mib		Solb	Lab	Sib		
0	2	4	5	7	9	11	12	
Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do	

La nostra oïda compta intervals

- En música, un **interval** és la distància entre dues notes tal com l'aprecia la oïda. Podem pensar que aquesta distància es mesura en semitons. O sigui: un interval és un nombre enter de semitons.
- Anem a fer un experiment per comprovar la següent afirmació:
*Quan escoltem música, la nostra oïda no "reconeix notes", sinó que **compta intervals**.*
- Considerem la melodia del començament del 3r moviment del començament del poema simfònic *Scheherazade*, de Rimsky-Korsakov (1888).

Notes Scheherazade tal com sona...

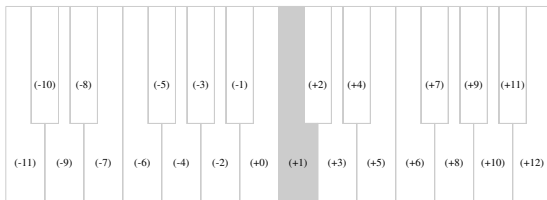
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

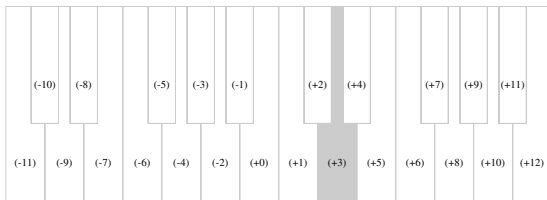
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

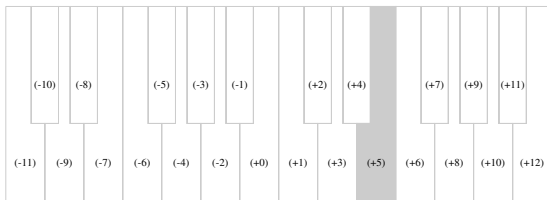
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

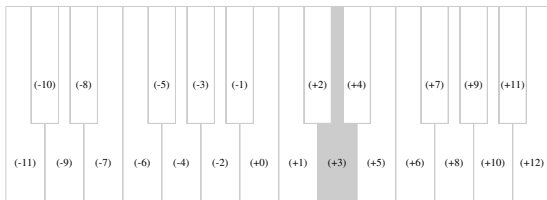
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

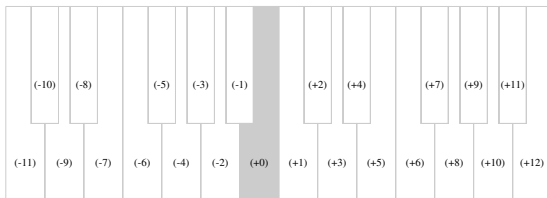
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

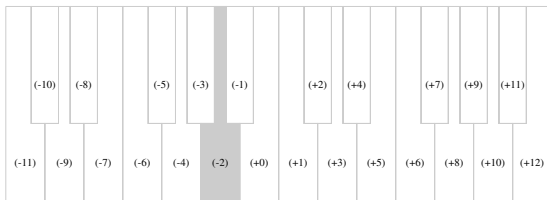
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

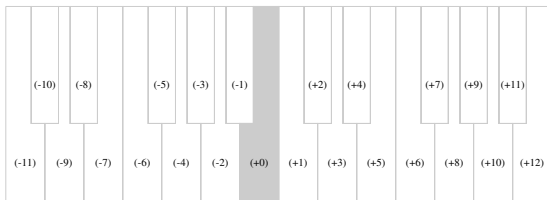
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

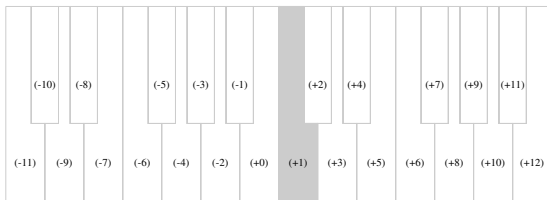
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

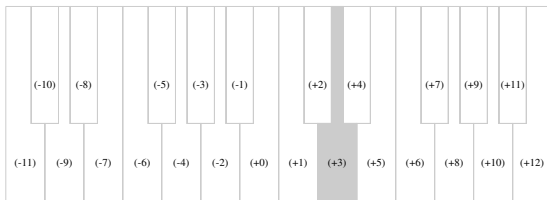
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

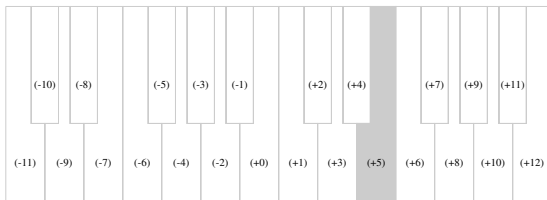
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

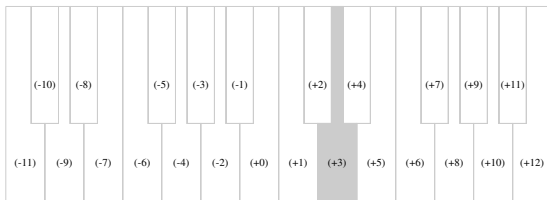
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

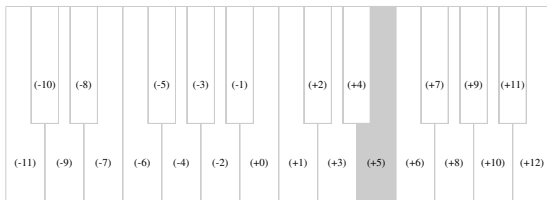
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

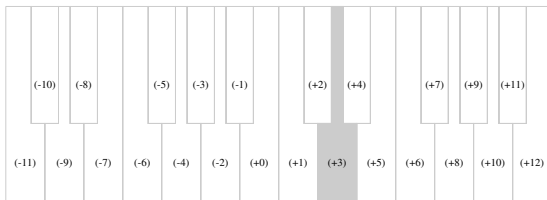
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

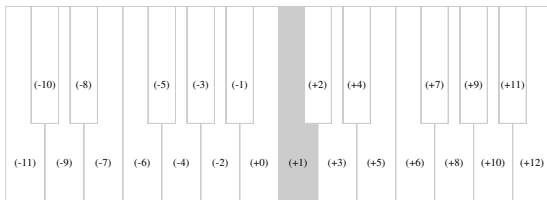
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

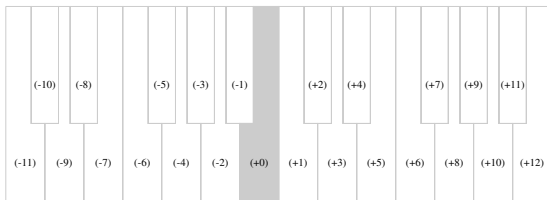
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

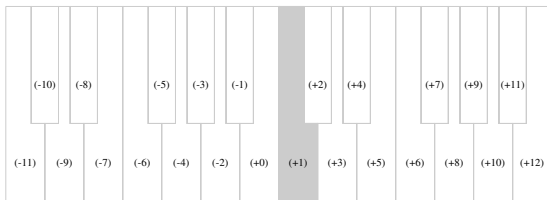
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

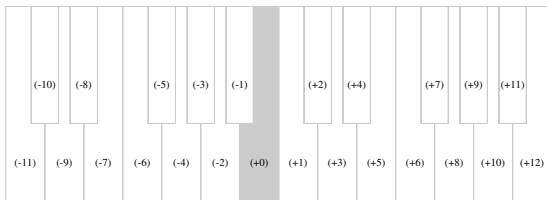
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

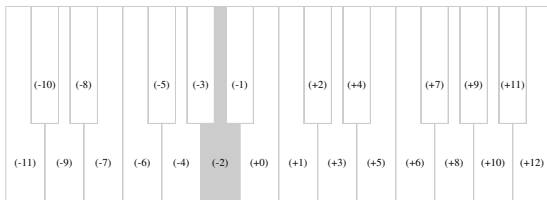
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

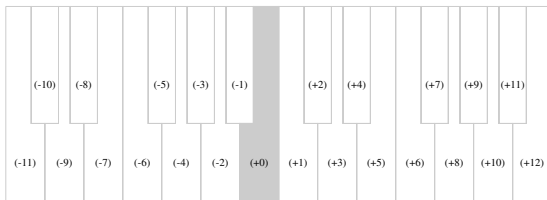
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

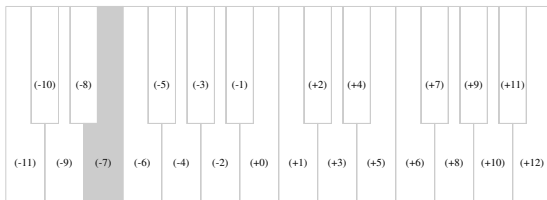
Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

Notes Scheherazade tal com sona...

Melodia Scheherezade amb les notes reals:



(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+0)Si
(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(+0)Si	(+1)Do	(+3)Re
(+5)Mi	(+3)Re	(+5)Mi	(+3)Re	(+1)Do	(+0)Si
(+1)Do	(+0)Si	(-2)La	(-4)Sol	(+0)Si	(-7)Mi

... i Scheherazade començant per una altra nota

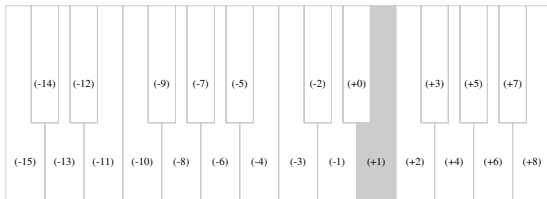
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

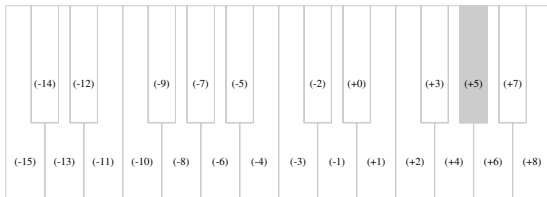
Melodia Scheherezade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

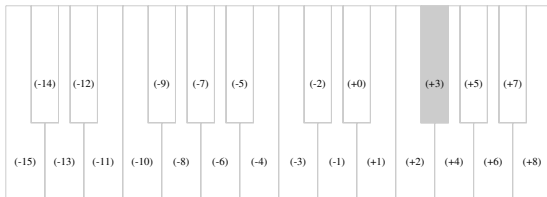
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

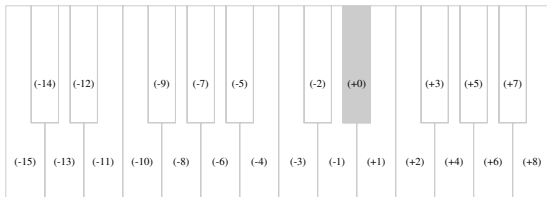
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

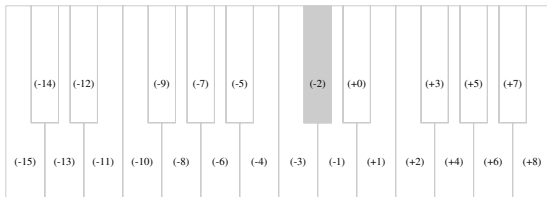
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \natural

... i Scheherazade començant per una altra nota

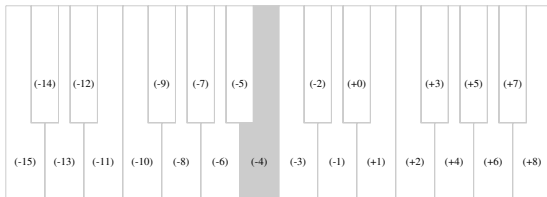
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

Melodia Scheherezade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

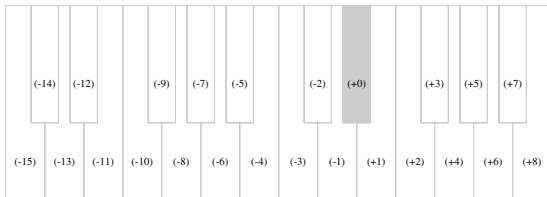
Melodia Scheherezade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

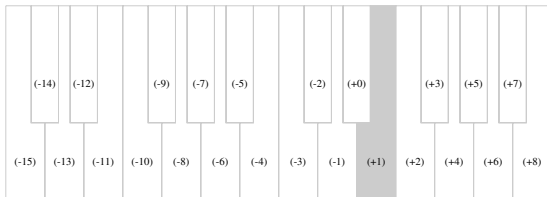
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

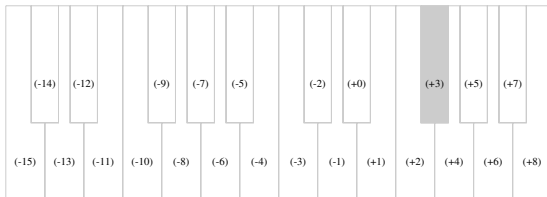
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

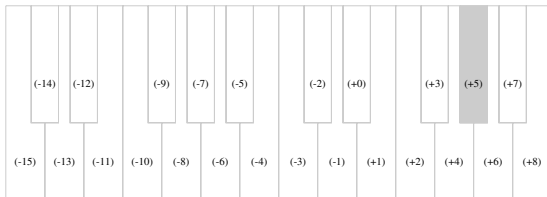
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

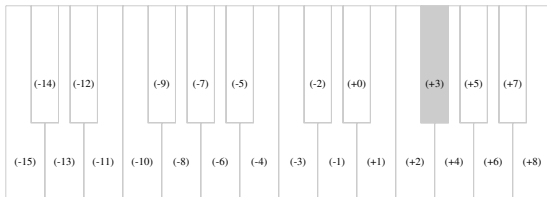
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

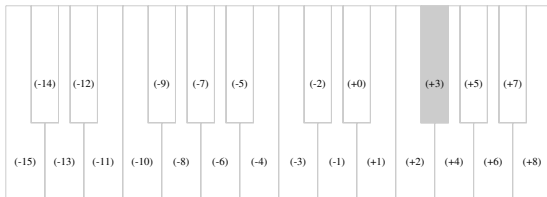
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

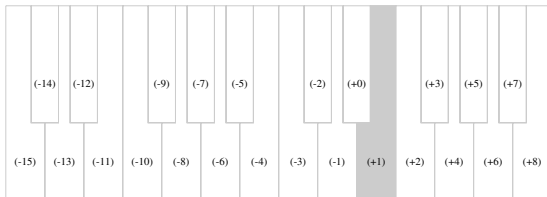
Melodia Scheherezade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

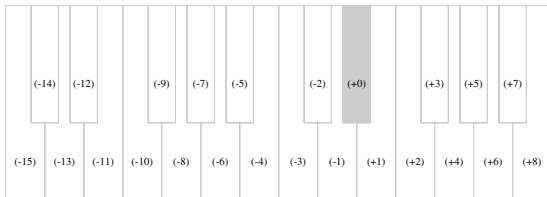
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

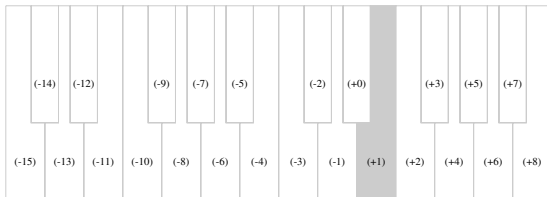
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

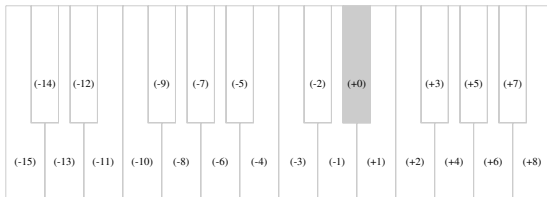
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

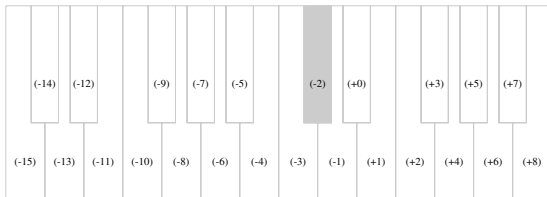
Melodia Scheherezade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

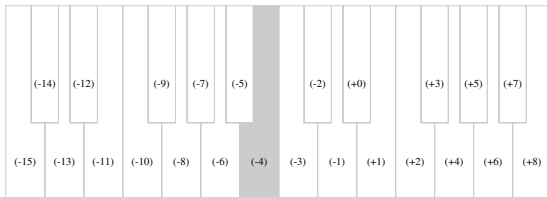
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

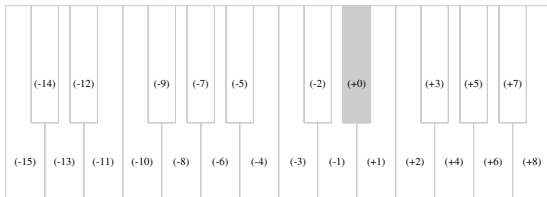
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

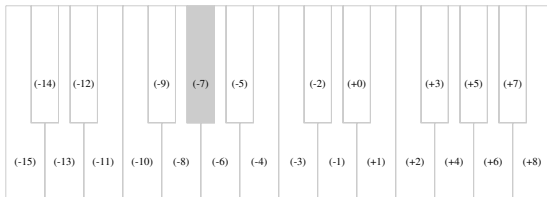
Melodia Scheherazade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

... i Scheherazade començant per una altra nota

Melodia Scheherezade començant amb un Re \sharp i mantenint els intervals:



(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+0)Re \sharp
(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(+0)Re \sharp	(+1)Mi	(+3)Fa \sharp
(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+5)Sol \sharp	(+3)Fa \sharp	(+1)Mi	(+0)Re \sharp
(+1)Mi	(+0)Re \sharp	(-2)Do \sharp	(-4)Si	(+0)Re \sharp	(-7)Sol \sharp

Resum

- 1 Comptar els temps
- 2 Comptar intervals
- 3 Pitàgoras i l'origen de les notes, les escales i els intervals**
- 4 Fourier i el timbre
- 5 La FFT de Cooley-Tukey i la revolució computacional
- 6 Conclusions

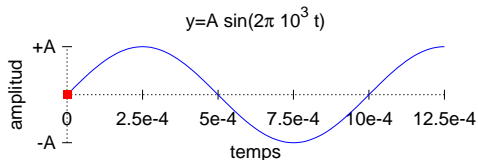
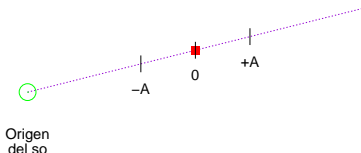
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



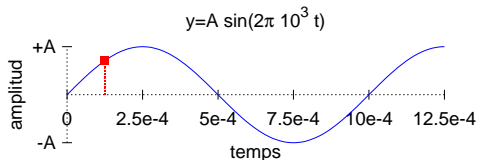
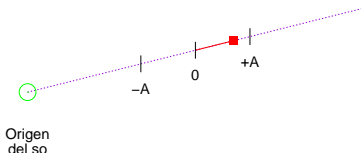
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



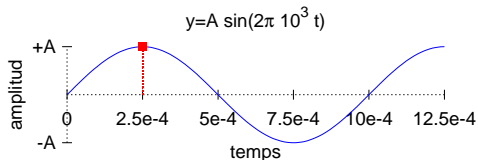
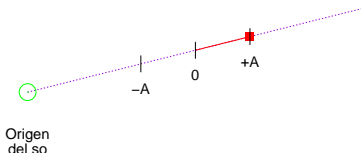
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



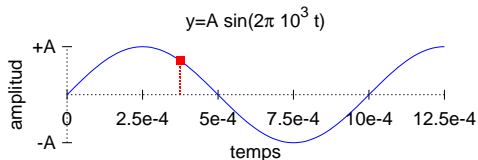
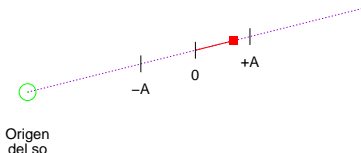
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



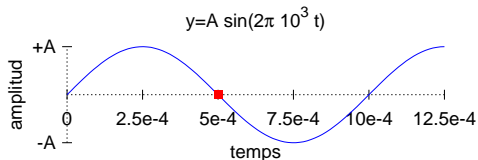
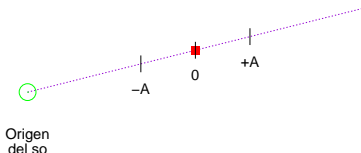
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



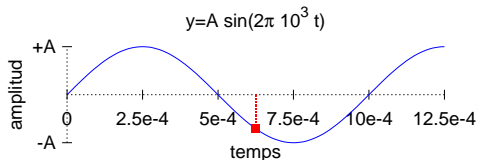
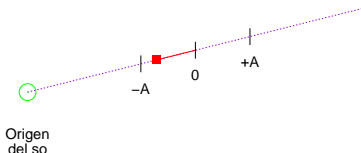
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



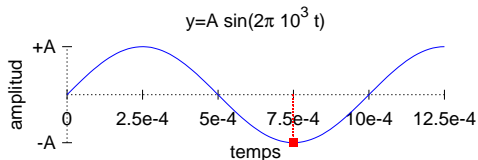
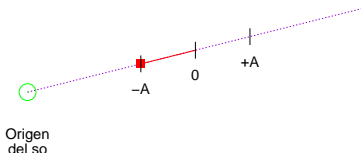
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



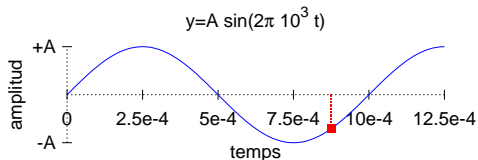
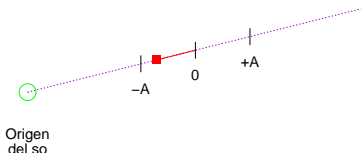
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



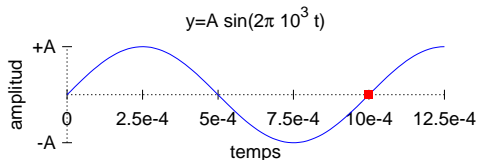
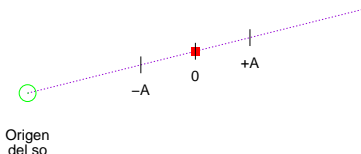
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



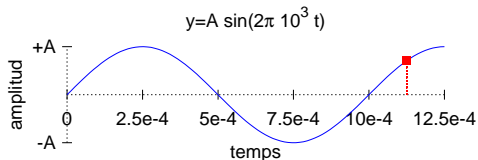
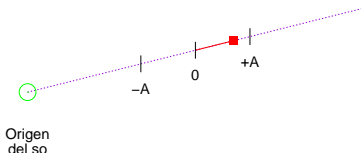
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



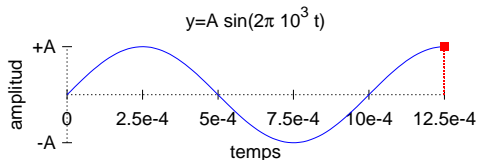
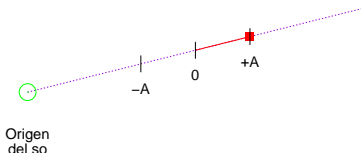
Música i so: el to musical

- Un **to musical** és la nostra percepció del so emès per un instrument (o la veu humana) quan sosté una nota (*No s'ha de confondre amb la distància intervàlica*).
- Es modela mitjançant la **funció que representa les vibracions**
 - d'una molècula d'aire, o
 - del nostre timpà, o
 - la membrana d'un micròfon, o d'un altaveu.

Es pot considerar que tot és el mateix.

Aquesta funció s'anomena **forma d'ona** (waveform).

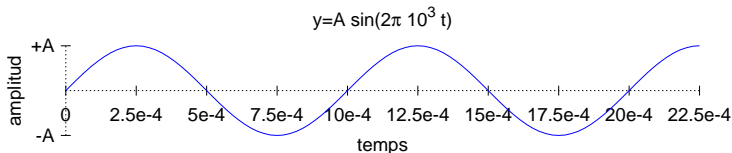
Per a un to musical, aquesta funció és **periòdica**.



Freqüència

- Un to musical està caracteritzat per:
 - La seva **durada** (n'hem parlat).
 - La seva **altura** (do 4, fa# 3, . . . , n'hem parlat).
 - La seva **intensitat** (el "volum").
 - El seu **timbre** ("com sona", en parlarem).
- La **freqüència** és la propietat física del so d'un to musical que es correspon a la seva altura. Es tracta de la freqüència de la seva forma d'ona: quantes vegades es repeteix per segon (quants "Hertz", o Hz).

En l'exemple d'abans, la freqüència és $\omega = 1000$ Hz.



El **període** és "la durada del tros que es repeteix":

$$T = 1/\omega = 10^{-3} \text{ s} \quad \text{a l'exemple.}$$

Relació entre altura i freqüència: afinació

- El 1936 es va prendre com a conveni que el La 4 té una freqüència de 440 Hz.
- A partir d'aquí, habitualment les freqüències de les altres notes es trien així: si una nota es troba a $n \in \mathbb{Z}$ semitons del La 4, la seva freqüència és

$$\omega = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2} \right)^n.$$

- Per tant: donades notes de freqüències ω_1 , ω_2 , el nombre de semitons que les separen és

$$\log_{\sqrt[12]{2}}(\omega_2/\omega_1).$$

- El que percebem com “sumar” un semitó físicament es correspon a multiplicar a freqüència per $\sqrt[12]{2}$.

És a dir: **la nostra oïda fa el logaritme.**

- Aquesta manera de triar les freqüències de les notes es coneix com a **sistema d'afinació de temperament igual.**

No ha estat pas el primer.

El sistema d'afinació pitagòric (I)

- El sistema pitagòric es remunta a l'antiga Mesopotàmia. Els pitagòrics el van matematitzar.
- La seva manera d'obtenir les notes va ser experimentar amb el *monocordi*: un instrument d'una corda amb un pont mòbil que es pot situar a una fracció ($1/2$, $2/3$, $4/5$, ...) de la longitud total de la corda.



<https://es.wikipedia.org/wiki/Monocordio#/media/Archivo:Monocordiodiapason20060323.png>

- La primera cosa que van observar és que, en posar el pont a la meitat (vibracions el doble de ràpid \implies freqüència doble), la corda feia "la mateixa nota" però més agut.

És l'**interval d'octava**.

És l'interval que fan les veus d'una dona i un home quan "canten el mateix". Van decidir anomenar igual les notes separades per una octava (avui diem: Do 3, Do 4, etc.)

El sistema d'afinació pitagòric (II)

- El segon experiment va ser posar el pont a $2/3$, i van observar que el so conjunt amb un monocordi amb la longitud total de corda era “molt harmoniós”.
Es el nostre **interval de quinta**, amb raó de freqüències $3/2 = 1.5$.
- Van decidir buscar noves notes aplicant succesivament intervals de quinta, i reduir les notes obtingudes a la octava de la nota de partida.
- Això vol dir, per $p = 1, 2, 3, \dots$
 - Multiplicar la freqüència per $(3/2)^p$, i
 - Dividir per 2 tantes vegades com calgués perquè el factor final estigui entre 1 i 2, o sigui, que la nota obtinguda estigui a la mateixa octava que la nota de partida.
- Fem el càlcul suposant que la nota de partida és Do.

El sistema d'afinació pitagòric (III)

Si la corda sencera fa freqüència f i li diem Do.

Mib	$(\frac{3}{2})^{-3}f = 0.2963f$	$(\frac{3}{2})^{-3} \cdot 2^2f = 1.1852f$
Sib	$(\frac{3}{2})^{-2}f = 0.4444f$	$(\frac{3}{2})^{-2} \cdot 2^2f = 1.7778f$
Fa	$(\frac{3}{2})^{-1}f = 0.6667f$	$(\frac{3}{2})^{-2} \cdot 2 f = 1.3333f$
Do	f	f
Sol	$(\frac{3}{2})f = 1.5000f$	$(\frac{3}{2})f = 1.5000f$
Re	$(\frac{3}{2})^2f = 2.2500f$	$(\frac{3}{2})^2f \cdot 2^{-1} = 1.1250f$
La	$(\frac{3}{2})^3f = 3.3750f$	$(\frac{3}{2})^3f \cdot 2^{-2} = 1.6875f$
Mi	$(\frac{3}{2})^4f = 5.0625f$	$(\frac{3}{2})^4 \cdot 2^{-2} = 1.2656f$
Si	$(\frac{3}{2})^5f = 7.5938f$	$(\frac{3}{2})^5 \cdot 2^{-2}f = 1.8984f$
Fa#	$(\frac{3}{2})^6f = 11.3906f$	$(\frac{3}{2})^6 \cdot 2^{-3}f = 1.4238f$
Do#	$(\frac{3}{2})^7f = 17.0859f$	$(\frac{3}{2})^7 \cdot 2^{-4}f = 1.0679f$
Sol#	$(\frac{3}{2})^8f = 25.6289f$	$(\frac{3}{2})^8 \cdot 2^{-4}f = 1.6018f$

El sistema d'afinació pitagòric (III)

Si la corda sencera fa freqüència f i li diem Do.

Mib	$(\frac{3}{2})^{-3}f = 0.2963f$	$(\frac{3}{2})^{-3} \cdot 2^2f = 1.1852f$
Sib	$(\frac{3}{2})^{-2}f = 0.4444f$	$(\frac{3}{2})^{-2} \cdot 2^2f = 1.7778f$
Fa	$(\frac{3}{2})^{-1}f = 0.6667f$	$(\frac{3}{2})^{-2} \cdot 2 f = 1.3333f$
Do	f	f
Sol	$(\frac{3}{2})f = 1.5000f$	$(\frac{3}{2})f = 1.5000f$
Re	$(\frac{3}{2})^2f = 2.2500f$	$(\frac{3}{2})^2f \cdot 2^{-1} = 1.1250f$
La	$(\frac{3}{2})^3f = 3.3750f$	$(\frac{3}{2})^3f \cdot 2^{-2} = 1.6875f$
Mi	$(\frac{3}{2})^4f = 5.0625f$	$(\frac{3}{2})^4 \cdot 2^{-2} = 1.2656f$
Si	$(\frac{3}{2})^5f = 7.5938f$	$(\frac{3}{2})^5 \cdot 2^{-2}f = 1.8984f$
Fa#	$(\frac{3}{2})^6f = 11.3906f$	$(\frac{3}{2})^6 \cdot 2^{-3}f = 1.4238f$
Do#	$(\frac{3}{2})^7f = 17.0859f$	$(\frac{3}{2})^7 \cdot 2^{-4}f = 1.0679f$
Sol#	$(\frac{3}{2})^8f = 25.6289f$	$(\frac{3}{2})^8 \cdot 2^{-4}f = 1.6018f$

El sistema d'afinació pitagòric (III)

Si la corda sencera fa freqüència f i li diem Do.

Mib	$(\frac{3}{2})^{-3}f = 0.2963f$	$(\frac{3}{2})^{-3} \cdot 2^2f = 1.1852f$
Sib	$(\frac{3}{2})^{-2}f = 0.4444f$	$(\frac{3}{2})^{-2} \cdot 2^2f = 1.7778f$
Fa	$(\frac{3}{2})^{-1}f = 0.6667f$	$(\frac{3}{2})^{-2} \cdot 2 f = 1.3333f$
Do	f	f
Sol	$(\frac{3}{2})f = 1.5000f$	$(\frac{3}{2})f = 1.5000f$
Re	$(\frac{3}{2})^2f = 2.2500f$	$(\frac{3}{2})^2f \cdot 2^{-1} = 1.1250f$
La	$(\frac{3}{2})^3f = 3.3750f$	$(\frac{3}{2})^3f \cdot 2^{-2} = 1.6875f$
Mi	$(\frac{3}{2})^4f = 5.0625f$	$(\frac{3}{2})^4 \cdot 2^{-2} = 1.2656f$
Si	$(\frac{3}{2})^5f = 7.5938f$	$(\frac{3}{2})^5 \cdot 2^{-2}f = 1.8984f$
Fa#	$(\frac{3}{2})^6f = 11.3906f$	$(\frac{3}{2})^6 \cdot 2^{-3}f = 1.4238f$
Do#	$(\frac{3}{2})^7f = 17.0859f$	$(\frac{3}{2})^7 \cdot 2^{-4}f = 1.0679f$
Sol#	$(\frac{3}{2})^8f = 25.6289f$	$(\frac{3}{2})^8 \cdot 2^{-4}f = 1.6018f$

La coma pitagòrica

Ordenem les notes, i calculem el quocient de freqüències de notes consecutives:

Nota	freq.	quocient
Do	$3^0 \cdot 2^0 = 1.0000f$	
Do#	$3^7 \cdot 2^{-11} = 1.0679f$	1.0679 "semitó cromàtic"
Re	$3^2 \cdot 2^{-3} = 1.1250f$	1.0535 "semitó diatònic"
Mi \flat	$3^{-3} \cdot 2^{-5} = 1.1852f$	1.0535
Mi	$3^4 \cdot 2^{-6} = 1.2656f$	1.0679
Fa	$3^{-1} \cdot 2^2 = 1.3333f$	1.0535
Fa#	$3^6 \cdot 2^{-9} = 1.4238f$	1.0679
Sol	$3 \cdot 2^{-1} = 1.5000f$	1.0535
Sol#	$3^8 \cdot 2^{-6} = 1.6018f$	1.0679
La	$3^3 \cdot 2^{-4} = 1.6875f$	1.0535
Si \flat	$3^{-2} \cdot 2^4 = 1.7778f$	1.0535
Si	$3^5 \cdot 2^{-7} = 1.8984f$	1.0679

El quocient dels semitons cromàtic i diatònic és la **coma pitagòrica**:

$$1.0679/1.0535 = 1.0137.$$

Motivació del temperament igual

- El problema de la coma pitagòrica és que, suposant que un instrument d'afinació fixa (flauta, clavicèmbal, viola de gamba) s'afina amb el sistema pitagòric, llavors quan se transposa no es mantenen els intervals.
- Però és natural mantenir els intervals quan se transposa: és el que fem quan cantem.
- Al renaixement, quan es van a començar a desenvolupar instruments de tecla, van arribar a plantejar-se construir instruments amb centenars de tecles (!!).
- La solució va ser el **sistema de temperament igual**, que ja hem vist: el quocient de freqüències de 2 notes separades un semitò sempre és $\sqrt[12]{2}$.
- Proposat a la Xina per Zhu Zaigu el 1584,
a Flandes per Simon Stevin el 1585 (trobat a manuscrit pòstum),
introduït a Europa per Andreas Werkmeister (Alemanya \approx 1700).

Sistema pitagòric vs. temperament igual

Nota	freq. pitagòrica	freq. temp. igual
Do	$1.0000f$	$1.0000f$
Do#	$1.0679f$	$1.0595f$
Re	$1.1250f$	$1.1225f$
Mi \flat	$1.1852f$	$1.1892f$
Mi	$1.2656f$	$1.2599f$
Fa	$1.3333f$	$1.3348f$
Fa#	$1.4238f$	$1.4142f$
Sol	$1.5000f$	$1.4983f$
Sol#	$1.6018f$	$1.5874f$
La	$1.6875f$	$1.6818f$
Si \flat	$1.7778f$	$1.7818f$
Si	$1.8994f$	$1.8877f$
Do	$2.0000f$	$2.0000f$

La raó de freqüències de la quinta temperada **no és** $3/2$,
pero la nostra oïda “la tolera bé”.

Resum

- 1 Comptar els temps
- 2 Comptar intervals
- 3 Pitàgoras i l'origen de les notes, les escales i els intervals
- 4 Fourier i el timbre**
- 5 La FFT de Cooley-Tukey i la revolució computacional
- 6 Conclusions

Sèries de Fourier

- El **timbre** d'un to musical (“com sona”) ve donat per la forma de la seva forma d'ona. . . no és ben bé cert.

La resposta ens la dona la seva **sèrie de Fourier**.

Joseph Fourier: *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, 1807.

- Si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ és T -periòdica i “una mica regular”, llavors

$$\begin{aligned}
 f(t) = & \frac{A_0}{2} + A_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{T} t\right) + B_1 \sin\left(2\pi \frac{1}{T} t\right) \\
 & + A_2 \cos\left(2\pi \frac{2}{T} t\right) + B_2 \sin\left(2\pi \frac{2}{T} t\right) \\
 & + A_3 \cos\left(2\pi \frac{3}{T} t\right) + B_3 \sin\left(2\pi \frac{3}{T} t\right) \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Sèries de Fourier

- El **timbre** d'un to musical (“com sona”) ve donat per la forma de la seva forma d'ona... no és ben bé cert.

La resposta ens la dona la seva **sèrie de Fourier**.

Joseph Fourier: *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, 1807.

- Si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ és T -periòdica i “una mica regular”, llavors

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + B_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) \right),$$

Sèries de Fourier

- El **timbre** d'un to musical (“com sona”) ve donat per la forma de la seva forma d'ona. . . no és ben bé cert.

La resposta ens la dona la seva **sèrie de Fourier**.

Joseph Fourier: *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, 1807.

- Si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ és T -periòdica i “una mica regular”, llavors

$$f(t) = \underbrace{\frac{A_0}{2}}_{\text{mitjana}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(A_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + B_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) \right)}_{\text{harmònics}},$$

Sèries de Fourier

- El **timbre** d'un to musical (“com sona”) ve donat per la forma de la seva forma d'ona... no és ben bé cert.

La resposta ens la dona la seva **sèrie de Fourier**.

Joseph Fourier: *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, 1807.

- Si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ és T -periòdica i “una mica regular”, llavors

$$f(t) = \underbrace{\frac{A_0}{2}}_{\text{mitjana}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(A_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + B_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) \right)}_{\text{harmònics}},$$

on

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Sèries de Fourier

- El **timbre** d'un to musical (“com sona”) ve donat per la forma de la seva forma d'ona. . . no és ben bé cert.

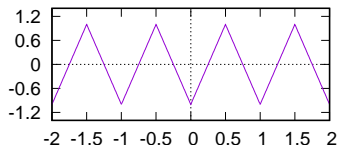
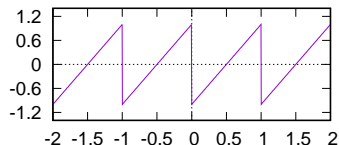
La resposta ens la dona la seva **sèrie de Fourier**.

Joseph Fourier: *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, 1807.

- Si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ és T -periòdica i “una mica regular”, llavors

$$f(t) = \underbrace{\frac{A_0}{2}}_{\text{mitjana}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + B_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) \right)}_{\text{harmònics}},$$

on “una mica regular” inclou funcions com ara “dent de serra” i “triangle”:



Sèries de Fourier

- El **timbre** d'un to musical (“com sona”) ve donat per la forma de la seva forma d'ona... no és ben bé cert.

La resposta ens la dona la seva **sèrie de Fourier**.

Joseph Fourier: *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, 1807.

- Si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ és T -periòdica i “una mica regular”, llavors

$$f(t) = \underbrace{\frac{A_0}{2}}_{\text{mitjana}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(A_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + B_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) \right)}_{\text{harmònics}},$$

on

- A_1, B_1 són els coeficients de l'**harmònic fonamental**, amb freqüència $1/T$,
- per $k \geq 2$, A_k, B_k són els coeficients dels **harmònics d'ordre superior**, amb freqüència k/T .

... passem a complexos!

- Fórmula de De Moivre: $(\cos x + i \sin x)^k = \cos(kx) + i \sin(kx)$
- Fórmula d'Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x.$

... passem a complexos!

- Fórmula de De Moivre: $(\cos x + i \sin x)^k = \cos(kx) + i \sin(kx)$
- Fórmula d'Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x.$
- Conseqüències: $(e^{ix})^n = e^{inx}$

... passem a complexos!

- Fórmula de De Moivre: $(\cos x + i \sin x)^k = \cos(kx) + i \sin(kx)$
- Fórmula d'Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x.$
- Conseqüències: $(e^{ix})^n = e^{inx}$

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

... passem a complexos!

- Fórmula de De Moivre: $(\cos x + i \sin x)^k = \cos(kx) + i \sin(kx)$
- Fórmula d'Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x.$
- Conseqüències: $(e^{ix})^n = e^{inx}$

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

... passem a complexos!

- Fórmula de De Moivre: $(\cos x + i \sin x)^k = \cos(kx) + i \sin(kx)$
- Fórmula d'Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
- Conseqüències: $(e^{ix})^n = e^{inx}$

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) = \frac{1}{2}(A_k - iB_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(A_k + iB_k)e^{i(-k)x}$$

... passem a complexos!

- Fórmula de De Moivre: $(\cos x + i \sin x)^k = \cos(kx) + i \sin(kx)$
- Fórmula d'Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
- Conseqüències: $(e^{ix})^n = e^{inx}$

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) = \frac{1}{2}(A_k - iB_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(A_k + iB_k)e^{i(-k)x}$$

- La sèrie de Fourier es pot escriure:

$$f(t) = \dots + c_{-2}e^{i2\pi\frac{-2}{T}t} + c_{-1}e^{i2\pi\frac{-1}{T}t} + c_0 + c_1e^{i2\pi\frac{1}{T}t} + c_2e^{i2\pi\frac{2}{T}t} + \dots$$

... passem a complexos!

- Fórmula de De Moivre: $(\cos x + i \sin x)^k = \cos(kx) + i \sin(kx)$
- Fórmula d'Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
- Conseqüències: $(e^{ix})^n = e^{inx}$

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) = \frac{1}{2}(A_k - iB_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(A_k + iB_k)e^{i(-k)x}$$

- La sèrie de Fourier es pot escriure:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi \frac{k}{T} t}$$

... passem a complexos!

- Fórmula de De Moivre: $(\cos x + i \sin x)^k = \cos(kx) + i \sin(kx)$
- Fórmula d'Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
- Conseqüències: $(e^{ix})^n = e^{inx}$

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) = \frac{1}{2}(A_k - iB_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(A_k + iB_k)e^{i(-k)x}$$

- La sèrie de Fourier es pot escriure:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi \frac{k}{T} t}$$

amb

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt.$$

Fourier i el timbre

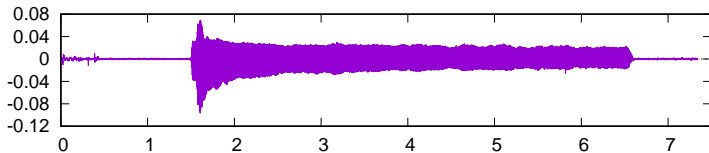
- Anem a fer un experiment per a comprovar la següent afirmació:
*El timbre d'un to musical ve donat per l'amplitud ($\sqrt{A_k^2 + B_k^2}$) dels coeficients de Fourier de la seva forma d'ona. **Diferents formes d'ona poden donar lloc al mateix timbre.***
- Per tant, **la nostra oïda és una super-calculadora de mòduls de coeficients de Fourier.**
- L'experiment és aquest: intento aproximar (el millor que puc) un to musical tot cantant un La 3. Ingredients:

Fourier i el timbre

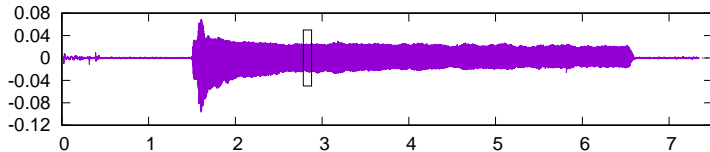
- Anem a fer un experiment per a comprovar la següent afirmació:
*El timbre d'un to musical ve donat per l'amplitud ($\sqrt{A_k^2 + B_k^2}$) dels coeficients de Fourier de la seva forma d'ona. **Diferents formes d'ona poden donar lloc al mateix timbre.***
- Per tant, **la nostra oïda és una super-calculadora de mòduls de coeficients de Fourier.**
- L'experiment és aquest: intento aproximar (el millor que puc) un to musical tot cantant un La 3. Ingredients:



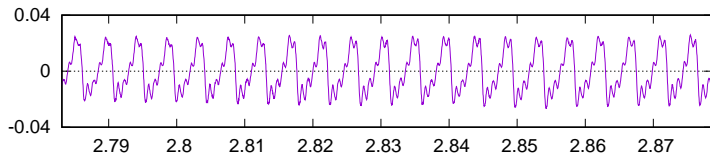
Forma d'ona de la meua veu



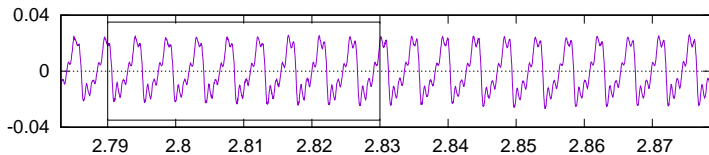
Forma d'ona de la meva veu



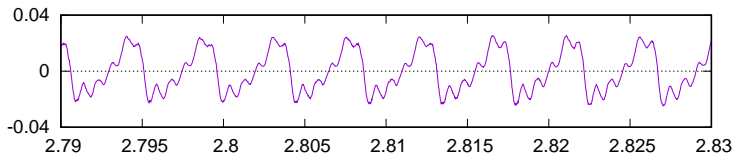
Forma d'ona de la meva veu



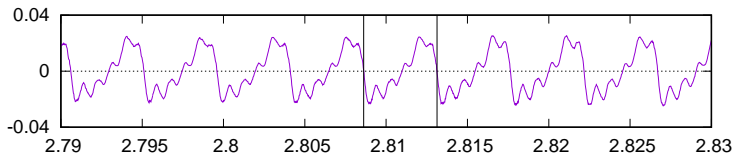
Forma d'ona de la meva veu



Forma d'ona de la meva veu



Forma d'ona de la meva veu

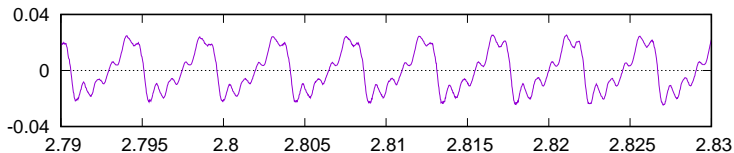
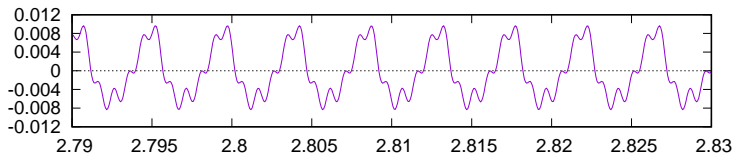


- Període: $2.80862\text{s} - 2.81313\text{s} = 0.00451\text{s}$.
- Freqüència: $1/0.00451\text{s} = 222\text{Hz}$.
- No està mal! (La 4 és $440\text{Hz} \Rightarrow$ La 3 és $440/2 = 220\text{Hz}$)
- L'ona no és perfectament periòdica, però cap humà és capaç de fer un to musical perfecte.
- De fet, els tons musicals perfectes **sonen artificials**.

Sèrie de Fourier de la meva veu

Després veurem com l'he calculada. És:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & -1.5085 \cdot 10^{-5} + (-6.8815 \cdot 10^{-3}) \cos(2\pi \cdot 222t) + (2.4947 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 222t) \\
 & + (1.6181 \cdot 10^{-3}) \cos(2\pi \cdot 444t) + (-8.3251 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 444t) \\
 & + (-2.4489 \cdot 10^{-4}) \cos(2\pi \cdot 666t) + (-3.5919 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 666t) \\
 & + (2.7689 \cdot 10^{-4}) \cos(2\pi \cdot 888t) + (1.0416 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 888t) \\
 & + (6.0099 \cdot 10^{-4}) \cos(2\pi \cdot 1110t) + (-1.8415 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 1110t)
 \end{aligned}$$



Conversió en sèrie de sinus

Converteixo la sèrie de Fourier de la meva veu en una sèrie de sinus, amb harmònics del mateix mòdul:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & -1.5085 \cdot 10^{-5} + (-6.8815 \cdot 10^{-3}) \cos(2\pi \cdot 222t) + (2.4947 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 222t) \\
 & + (1.6181 \cdot 10^{-3}) \cos(2\pi \cdot 444t) + (-8.3251 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 444t) \\
 & + (-2.4489 \cdot 10^{-4}) \cos(2\pi \cdot 666t) + (-3.5919 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 666t) \\
 & + (2.7689 \cdot 10^{-4}) \cos(2\pi \cdot 888t) + (1.0416 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 888t) \\
 & + (6.0099 \cdot 10^{-4}) \cos(2\pi \cdot 1110t) + (-1.8415 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 1110t)
 \end{aligned}$$

Conversió en sèrie de sinus

Converteixo la sèrie de Fourier de la meva veu en una sèrie de sinus, amb harmònics del mateix mòdul:

$$\sqrt{(-6.8815 \cdot 10^{-3})^2 + (2.4947 \cdot 10^{-3})^2} = 7.3197 \cdot 10^{-3}$$

$$\sqrt{(1.6181 \cdot 10^{-3})^2 + (-8.3251 \cdot 10^{-5})^2} = 1.6203 \cdot 10^{-3}$$

$$\sqrt{(-2.4489 \cdot 10^{-4})^2 + (-3.5919 \cdot 10^{-4})^2} = 4.3473 \cdot 10^{-4}$$

$$\sqrt{(2.7689 \cdot 10^{-4})^2 + (1.0416 \cdot 10^{-4})^2} = 2.9583 \cdot 10^{-4}$$

$$\sqrt{(6.0099 \cdot 10^{-4})^2 + (-1.8415 \cdot 10^{-3})^2} = 1.9371 \cdot 10^{-3}$$

Conversió en sèrie de sinus

Converteixo la sèrie de Fourier de la meva veu en una sèrie de sinus, amb harmònics del mateix mòdul:

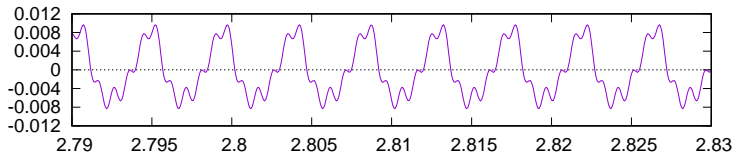
$$\begin{aligned}
 f(t) = & -1.5085 \cdot 10^{-5} + (-6.8815 \cdot 10^{-3}) \cos(2\pi \cdot 222t) + (2.4947 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 222t) \\
 & + (1.6181 \cdot 10^{-3}) \cos(2\pi \cdot 444t) + (-8.3251 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 444t) \\
 & + (-2.4489 \cdot 10^{-4}) \cos(2\pi \cdot 666t) + (-3.5919 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 666t) \\
 & + (2.7689 \cdot 10^{-4}) \cos(2\pi \cdot 888t) + (1.0416 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 888t) \\
 & + (6.0099 \cdot 10^{-4}) \cos(2\pi \cdot 1110t) + (-1.8415 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 1110t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(t) = & (7.3197 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 222t) + (1.6203 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 444t) + (4.3473 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 666t) \\
 & + (2.9583 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 888t) + (1.9371 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 1110t)
 \end{aligned}$$

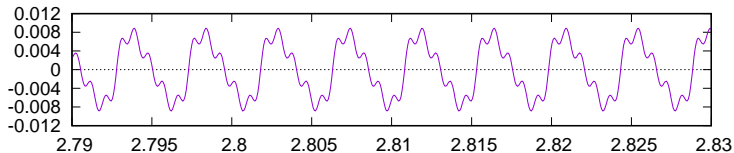
Conversió en sèrie de sinus

Converteixo la sèrie de Fourier de la meua veu en una sèrie de sinus, amb harmònics del mateix mòdul:

- Forma d'ona de f :



- Forma d'ona de g :



... però **sonen exactament igual!**

Una aproximació a la síntesi de so

- A la sèrie de Fourier de la meva veu, puc canviar la freqüència 222 per una freqüència qualsevol ω :

$$\begin{aligned}g(t) = & (7.3197 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 222t) + (1.6203 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 444t) \\ & + (4.3473 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 666t) + (2.9583 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 888t) \\ & + (1.9371 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 1110t)\end{aligned}$$

Una aproximació a la síntesi de so

- A la sèrie de Fourier de la meva veu, puc canviar la freqüència 222 per una freqüència qualsevol ω :

$$g(t) = (7.3197 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 222t) + (1.6203 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 444t) \\ + (4.3473 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 666t) + (2.9583 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 888t) \\ + (1.9371 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 1110t)$$

$$\rightarrow g(t, \omega) = (7.3197 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi\omega t) + (1.6203 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 2\omega t) \\ + (4.3473 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 3\omega t) + (2.9583 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 4\omega t) \\ + (1.9371 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 5\omega t)$$

Una aproximació a la síntesi de so

- A la sèrie de Fourier de la meua veu, puc canviar la freqüència 222 per una freqüència qualsevol ω :

$$\begin{aligned}
 g(t) &= (7.3197 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 222t) + (1.6203 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 444t) \\
 &\quad + (4.3473 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 666t) + (2.9583 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 888t) \\
 &\quad + (1.9371 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 1110t) \\
 \rightarrow g(t, \omega) &= (7.3197 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi\omega t) + (1.6203 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 2\omega t) \\
 &\quad + (4.3473 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 3\omega t) + (2.9583 \cdot 10^{-4}) \sin(2\pi \cdot 4\omega t) \\
 &\quad + (1.9371 \cdot 10^{-3}) \sin(2\pi \cdot 5\omega t)
 \end{aligned}$$

- Aleshores puc generar la forma d'ona de la meua veu per qualsevol freqüència. Puc pensar que he **sintetitzat** la meua veu.