



Dins el cervell de ChatGPT

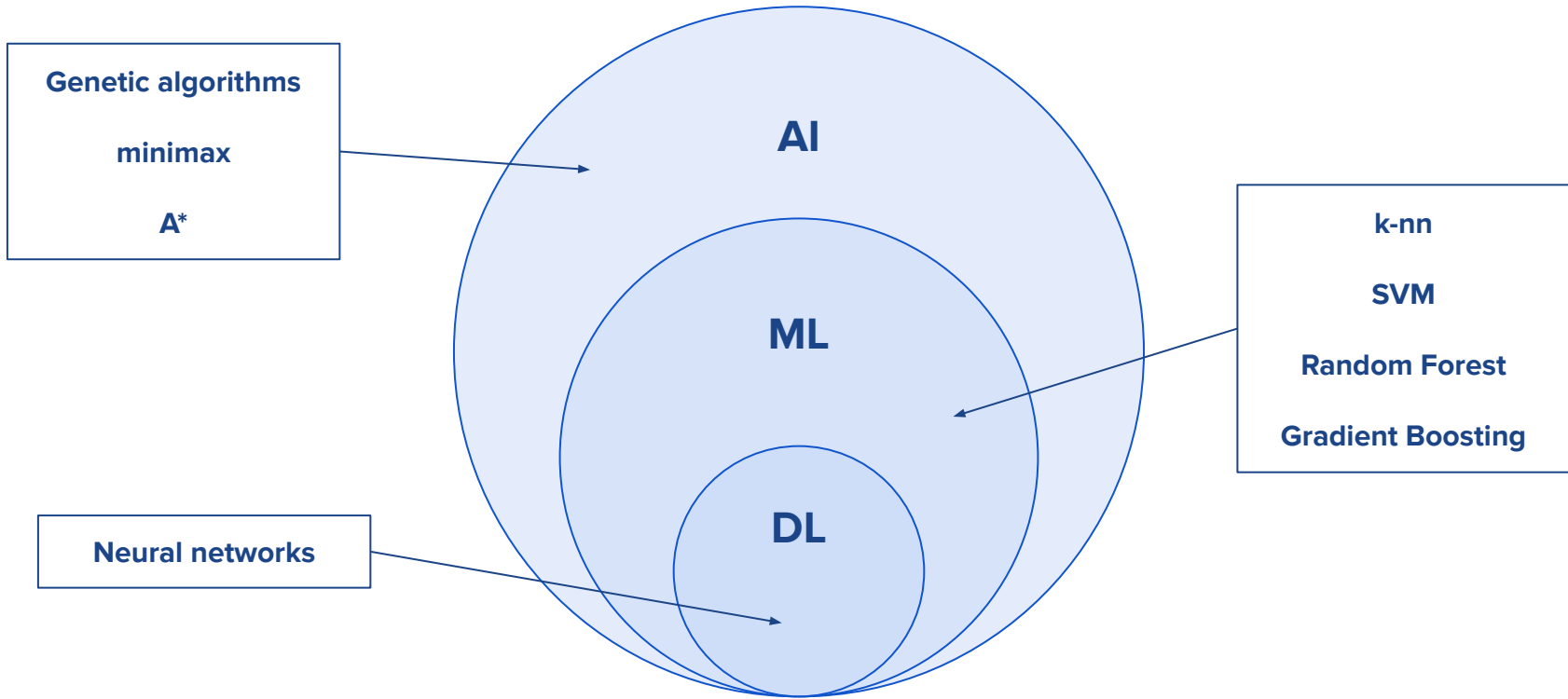
Matemàtiques en acció

Dissabtes de les matemàtiques 2025

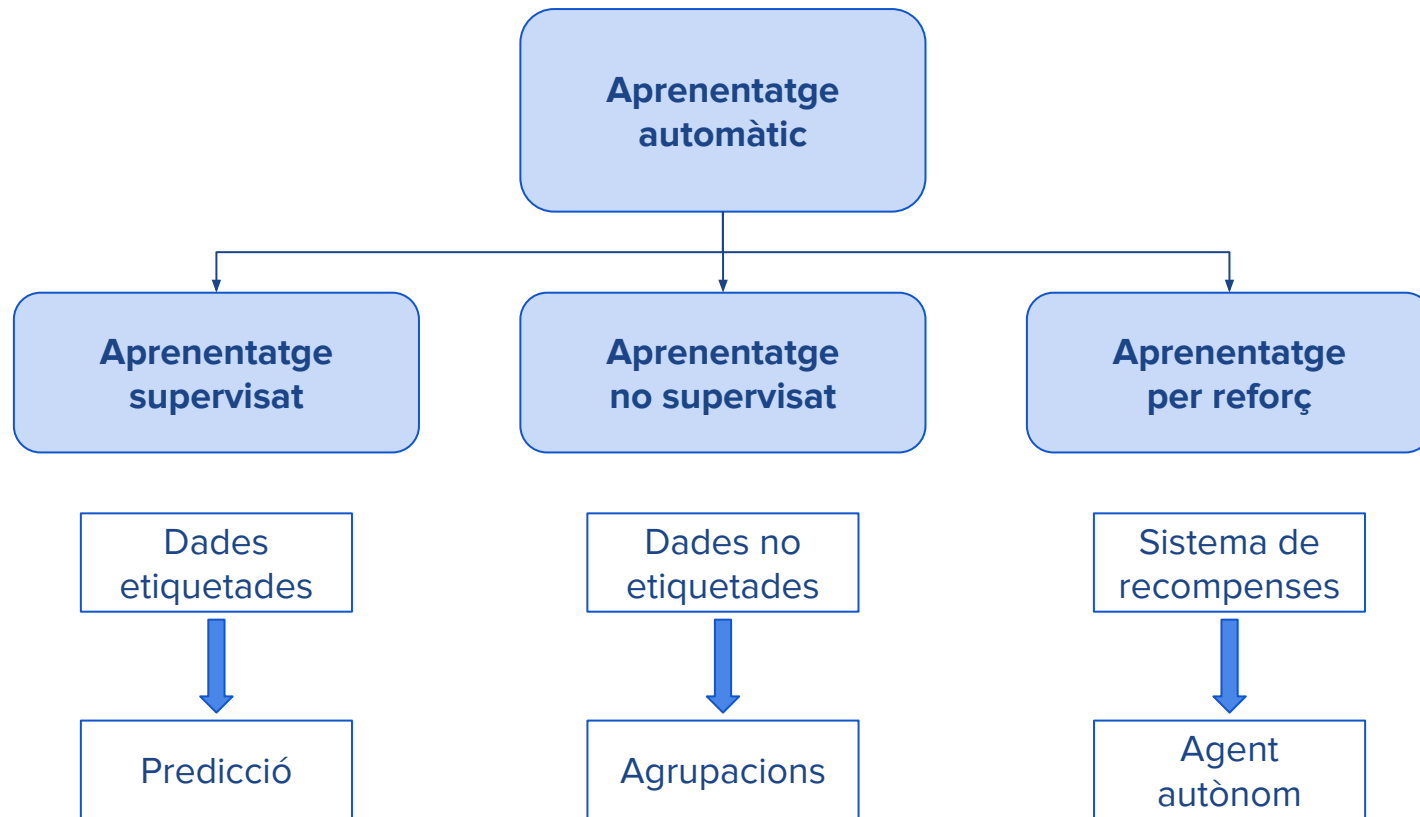
Universitat Autònoma de Barcelona

Introducció

AI vs ML vs DL



Tipus d'aprenentatge automàtic



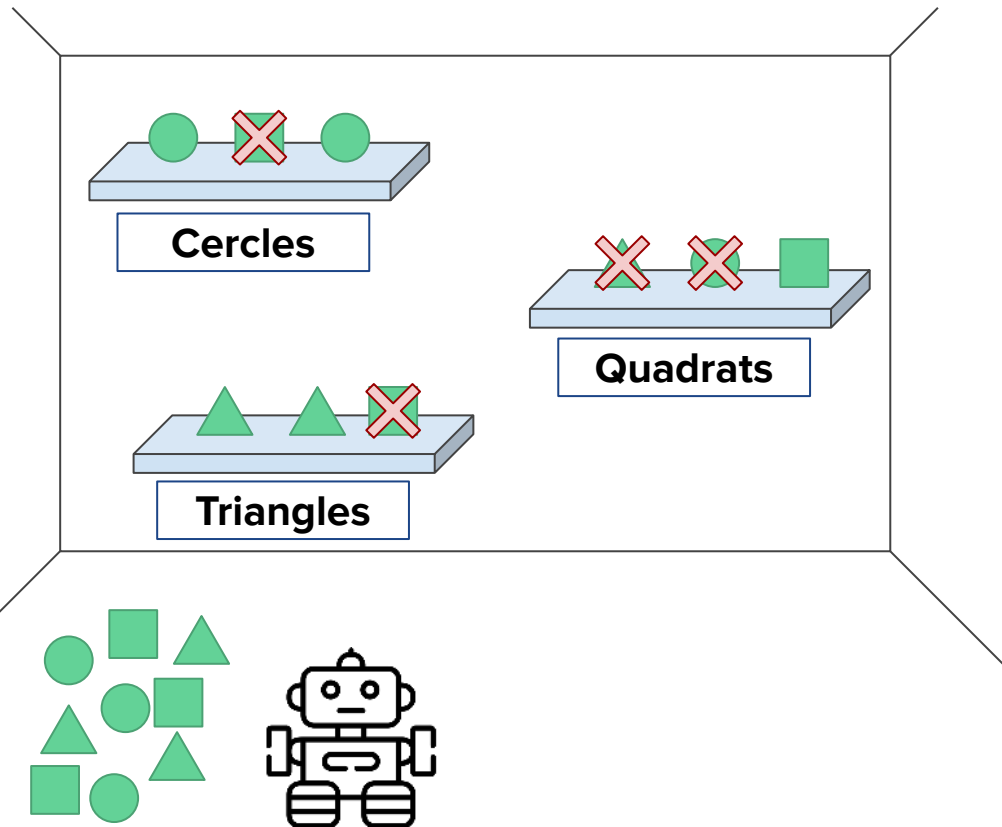
Aprenentatge supervisat

Procés d'entrenament

Inicialment el robot col·loca les figures en un **ordre aleatori**.

El robot assigna aleshores una **etiqueta a cada grup** de figures.

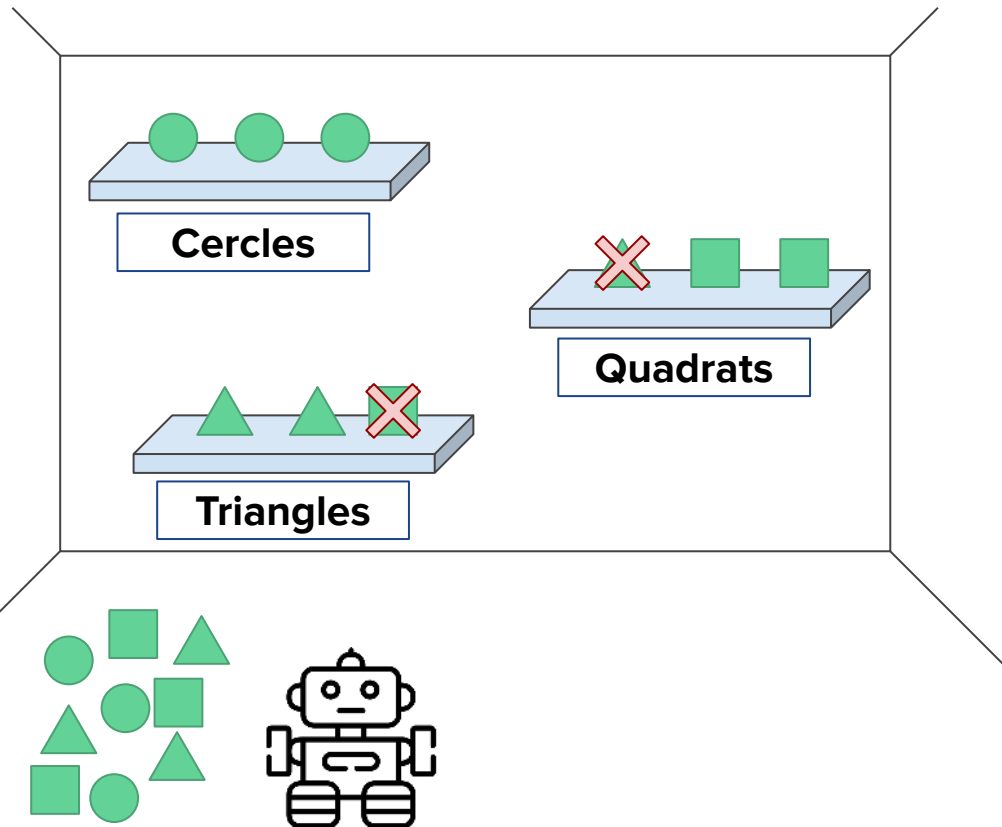
Llavors podem donar-li **informació** al robot sobre **quines figures estan bé i quines no**.



Procés d'entrenament

Amb la informació que li donem, **el robot ajusta els seus paràmetres interns** per millorar.

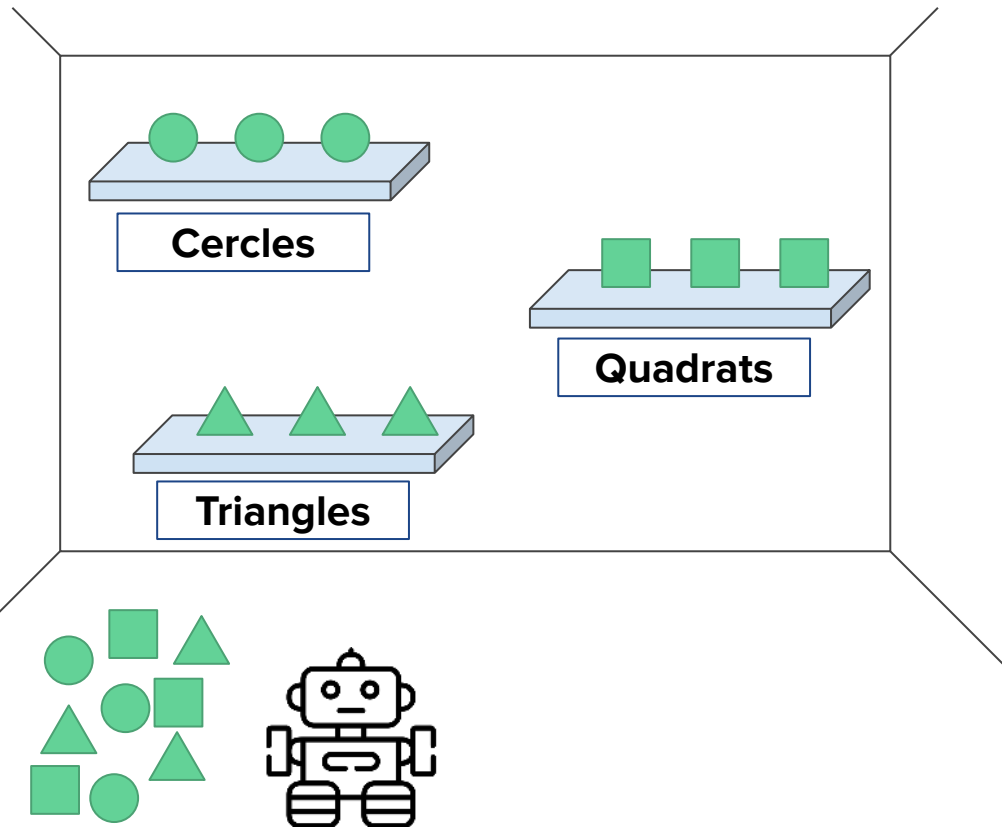
El resultat de cada iteració és millor que l'anterior, i podem tornar a donar informació al robot sobre quines figures estan ben col·locades i quines no.



Procés d'entrenament

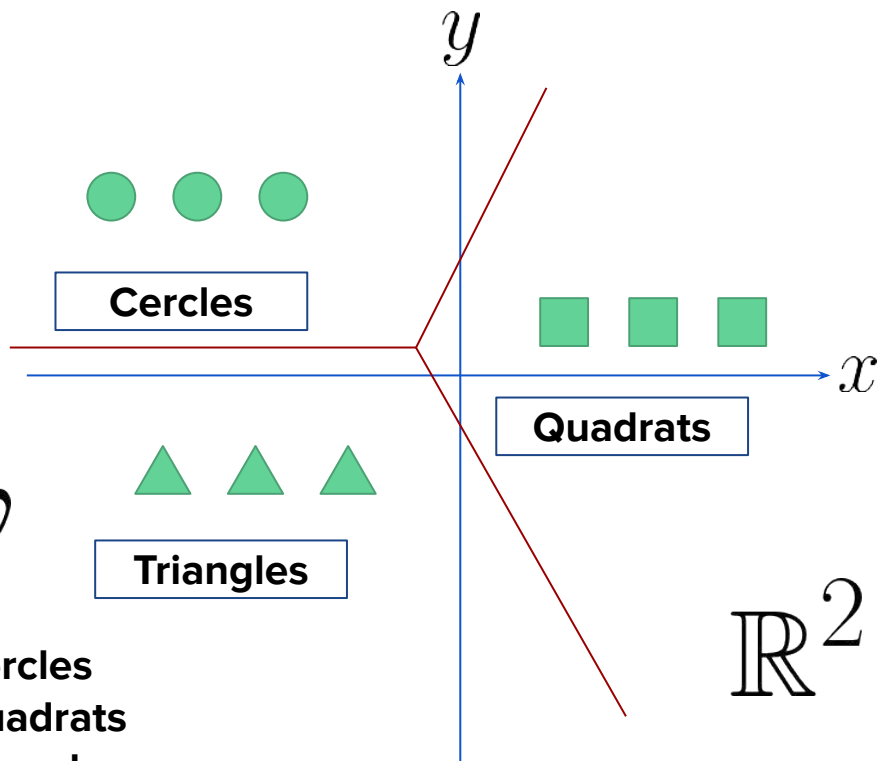
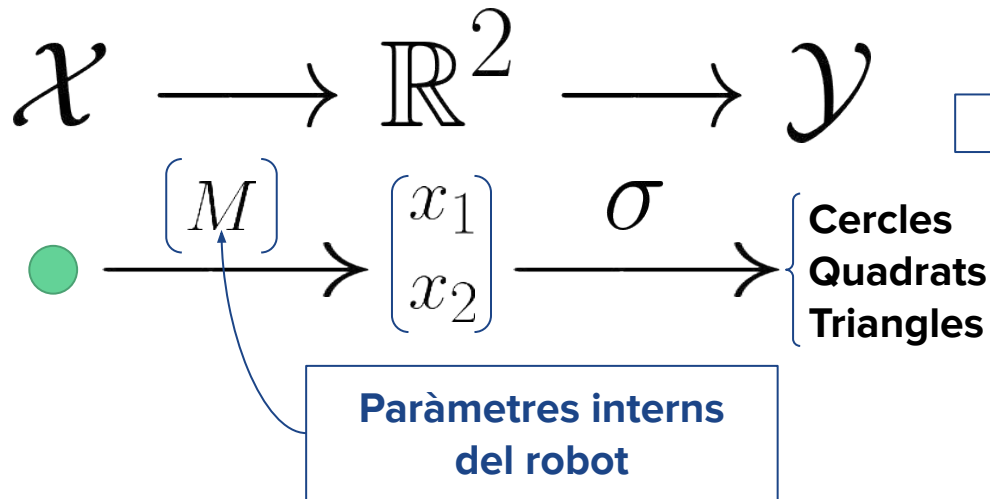
De nou, el robot **ajusta els seus paràmetres interns per continuar millorant.**

Al final del procés el robot és capaç de **classificar correctament totes les figures.**



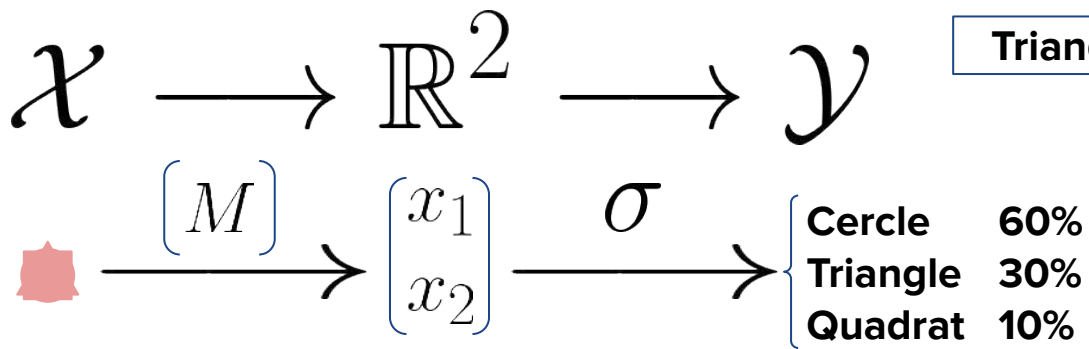
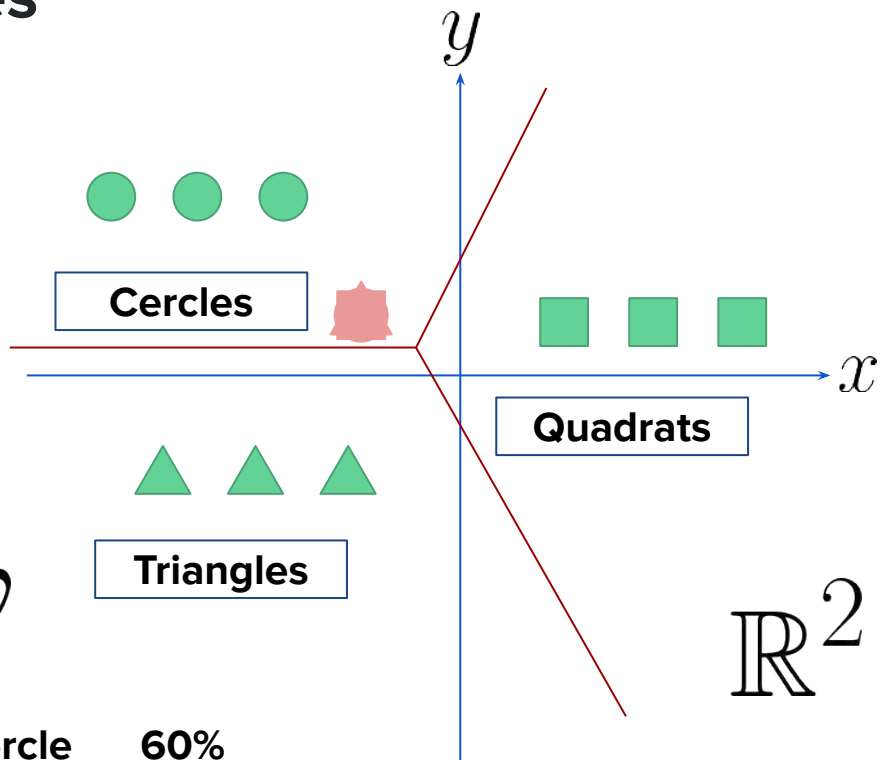
Representació de les dades

Realment, el robot està aprenent a representar les figures en un **pla amb coordenades numèriques**.



Classificació de noves dades

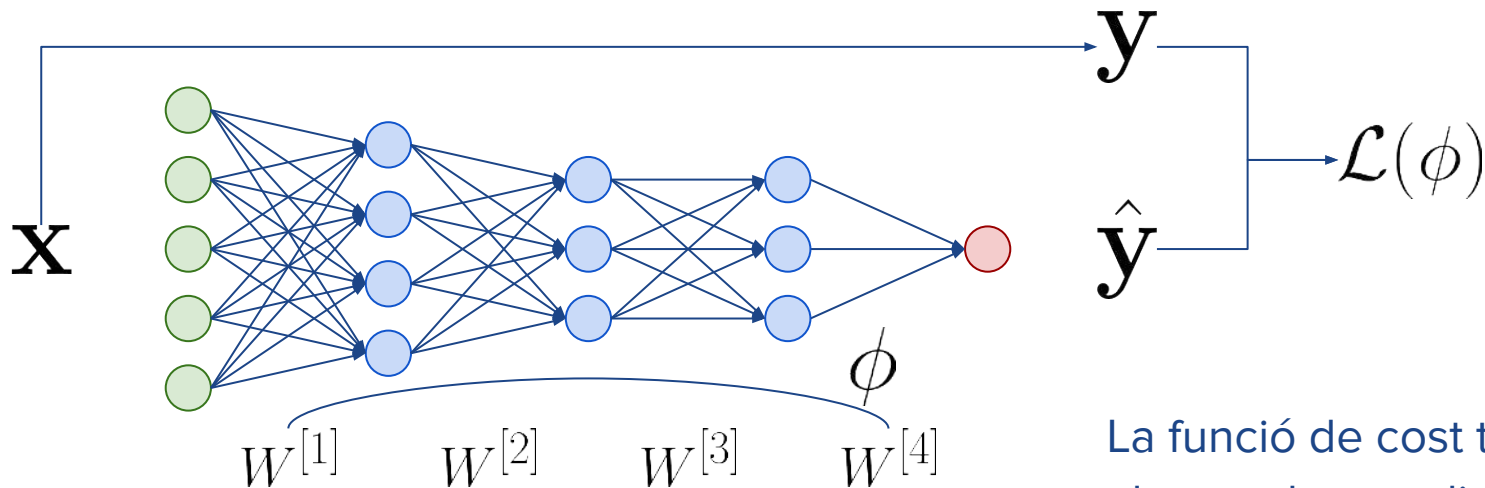
Quan tenim una **nova figura** i la volem classificar, podem mirar **en quina posició la col·loca el robot**.



Optimització de paràmetres

Optimització de paràmetres

Suposem que tenim un **conjunt de dades etiquetat** $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}_I$



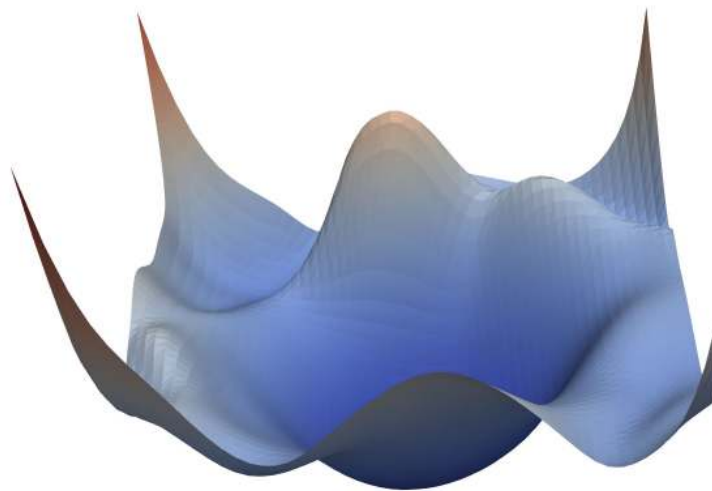
$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.7 & 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.2 & 0.9 \\ 0.1 & 0.6 & 0.9 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.9 & 0.3 \\ 0.6 & 0.9 & 0.5 \\ 0.8 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 & 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.2 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

La funció de cost té un valor alt quan les prediccions no són bones, per tant, **volem minimitzar la funció de cost.**

Optimització de paràmetres

Per **minimitzar la funció de cost** seguim un **procés iteratiu**:

- **Calculem el valor de la funció de cost** amb els paràmetres actuals.
- **Calculem el gradient** de la funció de cost.
- **Actualitzem els paràmetres** de la xarxa neuronal amb la informació del gradient de la funció de cost.



$$\mathcal{L}(\phi) \rightarrow \nabla_{\phi} \mathcal{L}(\phi)$$

Models de llenguatge

Models de llenguatge

Un **model de llenguatge** és una funció que **assigna una probabilitat a una seqüència de paraules**.

$$P(w_1, w_2, \dots, w_N)$$

Per exemple:

$$P(\text{el gat es va menjar un ratolí}) = 0.2$$

$$P(\text{el ratolí es va menjar un gat}) = 0.0001$$

Models de llenguatge

En la pràctica, **la probabilitat conjunta** es transforma en una **sèrie de probabilitats condicionades**.

$$\begin{aligned} P(w_1, w_2, \dots, w_n) &= P(w_1)P(w_2 \mid w_1) \dots P(w_N \mid w_1, \dots, w_{N-1}) \\ &= \prod_{i=1}^N P(w_i \mid w_1, \dots, w_{i-1}) \end{aligned}$$

Això significa que **només necessitem que el model predigui la probabilitat de la següent paraula** donada la seqüència de paraules anteriors.

Codificació del text

Codificació numèrica del text

Si volem **treballar amb text** hem de **codificar les paraules amb números**.

Per fer-ho definim un **llistat de tokens**, on **cada token és una combinació de caràcters**.

El **llistat de tokens** ha de satisfer **dues propietats**:

- Les **paraules més comuns** estan representades per **un token**.
- **Totes les paraules** es poden representar com a **seqüència de tokens**.

DINS DEL CERVELL DE CHATGPT: MATEMÀTIQUES EN ACCIÓ

Tots sabem que ChatGPT és capaç de respondre preguntes i mantenir converses, però quines són les matemàtiques que ho fan possible?

```
35, 9751, 24711, 356, 643, 12073, 43, 3467, 6969, 835,
38, 2898, 25, 386, 2390, 44, 73053, 27712, 5876, 1600,
5301, 26925, 40, 40162, 271, 51, 2469, 19972, 336, 174
4, 13149, 38, 2898, 22257, 2107, 101020, 409, 6013, 26
5, 864, 13562, 2392, 602, 90990, 404, 7669, 288, 11, 8
24, 22980, 198, 447, 1572, 274, 3244, 3625, 5634, 336,
6496, 83, 8467, 1744, 11640, 8571, 3284, 30
```

Actualment es fan servir **llistats amb més de 100.000 tokens diferents**.

Codificació numèrica del text

La **tokenització** ens permet representar text de forma numèrica, però té un inconvenient: **no es manté el contingut semàntic que poden tenir les paraules o les expressions matemàtiques.**

12345 + 12245 = 24590

12345 + 56789 = 69134

11111 + 22222 = 33333

4513, 1774, 489, 220, 8259, 177
4, 284, 220, 13078, 1954, 198,
4513, 1774, 489, 220, 19282, 45
78, 284, 220, 25168, 1958, 198,
5037, 806, 489, 220, 9716, 131
3, 284, 220, 8765, 1644, 198

二十二 + 三十三 = 五十五

六十六 + 三十三 = 九十九

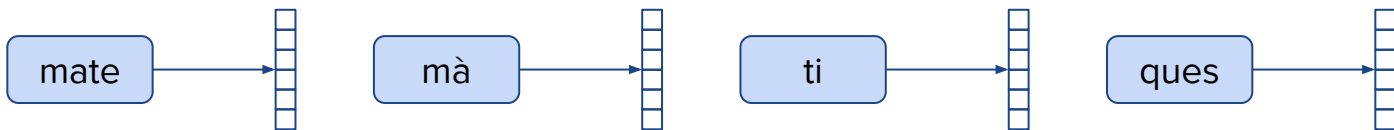
四十四 + 四十四 = 八十八

九十九 + 二十二 = ?

Representació vectorial del text

Representació vectorial del text

Matemàticament, **el que busquem és trobar una bona representació vectorial per a cada token**, de forma que el model de llenguatge pugui **predir les probabilitats de forma acurada**.

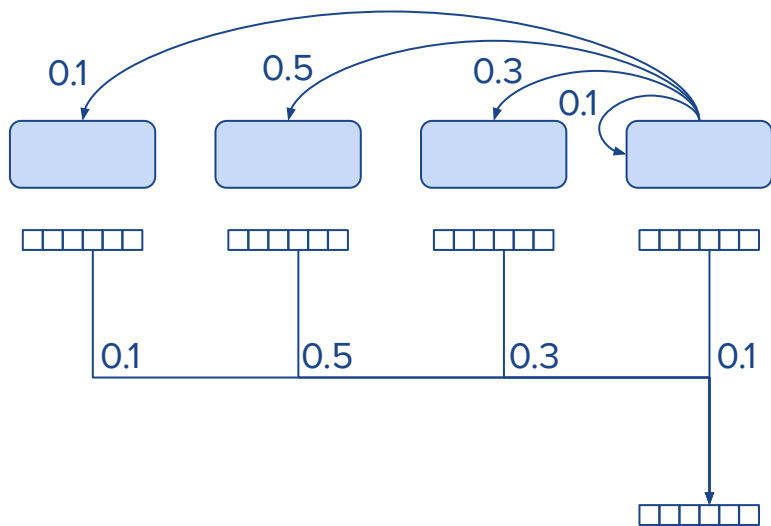


Els models de llenguatge actuals utilitzen **xarxes neuronals profundes per transformar l'identificador de cada token** en una representació vectorial.

El punt més important és que **la representació vectorial de cada token depèn de la frase** que estem processant en cada moment. D'aquesta forma, la representació d'un mateix token pot canviar segons el context.

Mecanisme d'atenció

El pas més important per generar una **representació vectorial** que depengui del **context** és el **mecanisme d'atenció**.



Per **calcular el percentatge d'atenció** a cada paraula de la seqüència s'utilitzen diverses **matrius de paràmetres**.

$$v_m = \beta_v + \Omega_v x_m$$

$$q_n = \beta_q + \Omega_q x_n$$

$$k_l = \beta_k + \Omega_k x_l$$

$$w(x_n, x_i) = \text{softmax}_i(k_{\bullet}^T q_n)$$

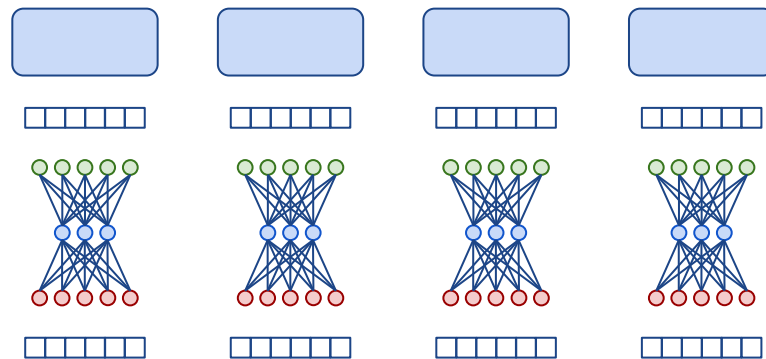
$$\tilde{x}_n = \sum_{i=1}^N w(x_n, x_i) v_i$$

Transformació independent

Per **afegir flexibilitat al model**, també s'apliquen **transformacions de forma independent** a les representacions vectorials de cada paraula.

Aquestes transformacions també contenen **matrius de paràmetres**.

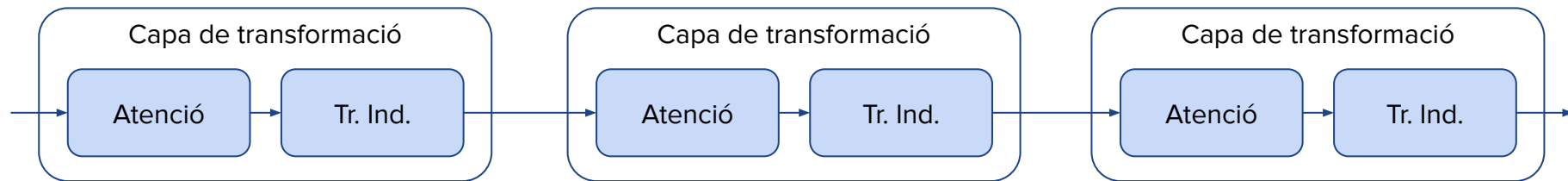
$$FFN(x) = \max(0, xW^{[1]} + b^{[1]})W^{[2]} + b^{[2]}$$



Arquitectura de transformació

Si ajuntem el **mecanisme d'atenció** amb la **transformació independent** obtenim una **capa de l'arquitectura de transformació**.

Concatenant diverses capes de transformació podem generar representacions vectorials de cada token que **capturen molt bé la informació semàntica del context**.

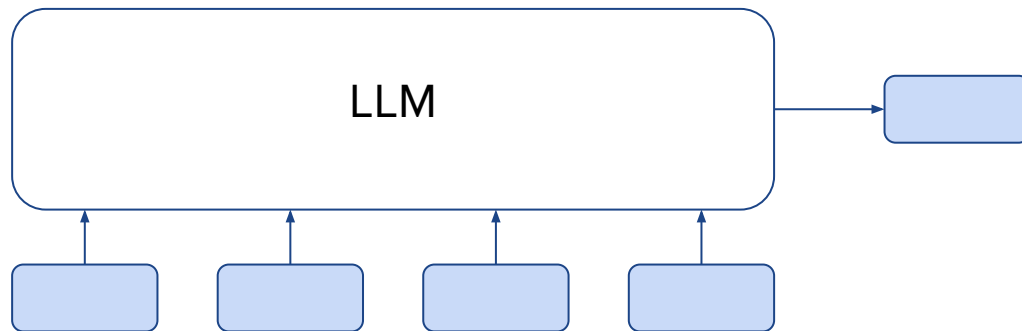


Els models actuals més potents tenen **desenes de capes i centenars de mil·lers de milions de paràmetres**.

Entrenament del model de llenguatge

Procés d'entrenament

La base d'un chatbot és un **model de llenguatge** que prediu la següent paraula més probable donada una seqüència de paraules.



Per fer el model més útil, se segueix un **procés de tres passos**:

- Pre-entrenament no supervisat
- Ajust supervisat
- Aprenentatge amb retroacció humana

Pre-entrenament no supervisat

Per a la **primera etapa** del procés s'utilitza un gran conjunt de dades format per **tot el text que es pot trobar a Internet**.

Amb aquest text **es genera un conjunt de dades etiquetades** considerant diferents seqüències per a que el model predigui la següent paraula.

Pitágoras de Samos, a menudo conocido simplemente como Pitágoras, fue un filósofo y polímata griego jonio.



"Pitágoras de Samos, a menudo" → conocido
"Pitágoras de Samos, a menudo conocido" → simplemente
"Pitágoras de Samos, a menudo conocido simplemente" → como



Ajust supervisat

La **segona etapa** de l'entrenament utilitza **converses escrites per humans experts**, amb format pregunta resposta, però sempre l'objectiu del model és predir la següent paraula més probable.

Usuari: D'on era Pitàgoras?

Assistent: Pitàgores va ser un filòsof i matemàtic grec.

Usuari: I en quin any va nèixer?

Assistent: Pitàgoras va nèixer a la dècada del 490 a.C.

Usuari: Quina és la fórmula del metà?

Assistent: La fórmula del metà és CH_4 .

Usuari: I què representa la C?

Assistent: La C representa un àtom de carboni.

El **conjunt de dades en aquest cas és molt més limitat**, però està enfocat en que el model respongui com un assistent.

Aprentatge amb retroacció humana

Per últim, per a la **tercera etapa** del procés **es generen diverses respostes** del model a una pregunta concreta i **un equip d'humans ordena les respostes segons el seu criteri**.

Amb aquesta informació es pot **aplicar la tècnica d'aprenentatge amb retroacció humana**, tot i que sempre l'objectiu del model és predir la següent paraula.

Usuari: D'on era Pitàgoras?
Assistent: Grècia

2

Usuari: D'on era Pitàgoras?
Assistent: Pitàgores va ser un filòsof i matemàtic grec.

1

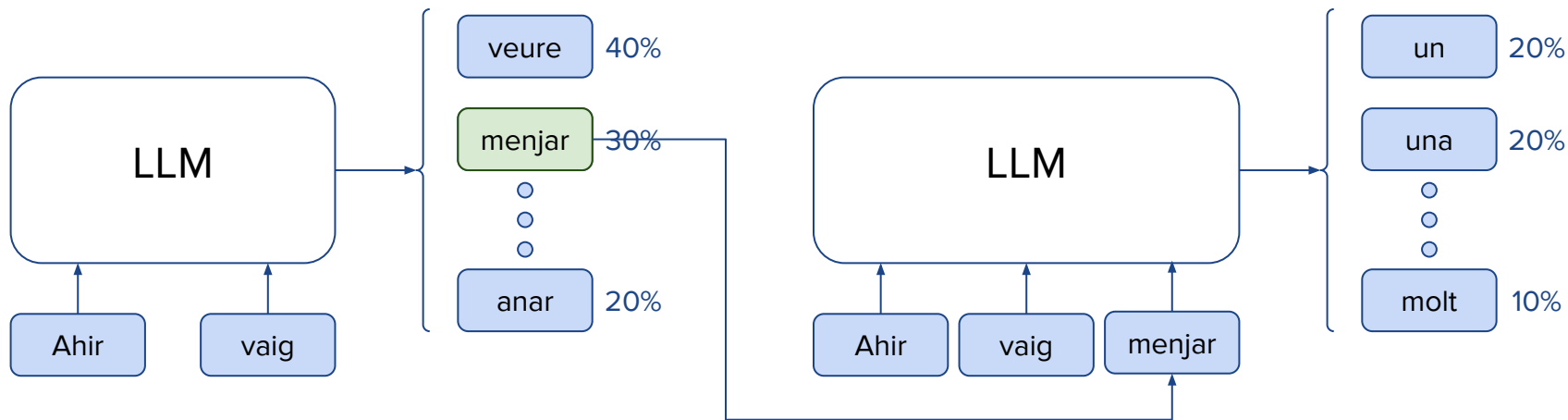
Usuari: D'on era Pitàgoras?
Assistent: Itàlia

3

Generació de text

Generació de text

Quan el **model de llenguatge està entrenat** podem generar **nou text seguint un procés iteratiu que inclou una part aleatòria**.



El **procés continua** fins que el model **genera un token special** que representa el final de la frase.

Examples

Proposta de resum per a la xerrada

Dissabte 16 de març de 2024 (Celebació del dia mundial de les Matemàtiques, conjuntament amb la Societat Catalana de Matemàtiques)
Alejandra Cabaña. Departament de Matemàtiques de la UAB.
TOT L'ATZAR DEL MÓN ES REDUEIX A LLENÇAR MONEDES

Has dubtat mai quina sèrie veure? O on anar-te'n de vacances? En algun moment, pots ser simplement has llançat una moneda perquè ella decideixi per tu. En realitat, fa temps que sabem que el resultat de llançar una moneda no és realment un assumpte de sort. L'atzar en el llançament està introduït per la poca traça dels humans que la llancen: el resultat és aleatori perquè els qui la llancen no ho fan dues vegades de la mateixa manera. Petites diferències en l'angle de llançament, o la força amb què és llançada, fan que cada llançament sigui diferent, i per tant el resultat impredecible. En aquesta xerrada explorarem com a resultats importants de la probabilitat i l'estadística es basen exclusivament en successions de cares i creus.

Dissabte 6 d'abril de 2024

Ferran Renalias. Dissenyador de Jocs.

LA FÒRMULA DE LA DIVERSIÓ: LES MATEMÀTIQUES EN ELS JOCS DE TAULA

En aquesta xerrada, desgranarem diversos aspectes en la intersecció entre les matemàtiques i la creació de jocs de taula. Quina és la relació entre probabilitat i valor d'un joc d'obtenció de recursos; com treballam amb combinacions i permutacions per a crear variabilitat; com podem encabir més de 750.000 preguntes en només 48 cartes; com podem aplicar simulacions de Montecarlo per ajustar puntuacions en el mode solitari d'un joc; com podem posar un mapa d'una muntanya a dins d'un donut.

Dissabte 13 d'abril de 2024

Joaquim Roé. Departament de Matemàtiques de la UAB.

JUQUEM A DISPARAR FITXES? DELS GRAFS A LES MATEMÀTIQUES TROPICALS

Si mai heu jugat a resseguir un dibuix lineal, sense aixecar el llapis i sense passar dues vegades pel mateix lloc; ja sabeu què és un graf; els va introduir Leonhard Euler el segle XVIII, en establir que era impossible fer una caminada per la ciutat de Königsberg que passés pels seus set ponts sense repetir-ne cap. En els "chip-firing games" o jocs de disparar fitxes, cada posició d'un graf té una pila de fitxes que es poden "disparar" o repartir cap a les posicions veïnes. El joc acaba, o s'allarga per sempre? Per resoldre-ho, haurém d'aprendre una mica de matemàtiques tropicals, un món fascinant on $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.

Aquest curs faig una xerrada explicant les matemàtiques que fan funcionar ChatGPT. Em podries ajudar a escriure un títol i un resum? Et passo exemples de les xerrades del curs passat.

LLM

Dissabte 8 de març de 2025

Antoni Lozano. Departament de Matemàtiques de la UAB.

DINS DEL CERVELL DE CHATGPT: MATEMÀTIQUES EN ACCIÓ

Tots sabem que ChatGPT és capaç de respondre preguntes i mantenir converses, però quines són les matemàtiques que ho fan possible? En aquesta xerrada explorarem els fonaments matemàtics que sustenten els models de llenguatge com ChatGPT, des de l'àlgebra lineal fins als processos de valoració de probabilitats i optimització. Descobrirem com les màquines aprenen a treballar partint de grans quantitats de dades mitjançant tècniques de xarxes neuronals i com les matemàtiques, en forma de matrius, vectors i operacions de càlcul complex, són essencials per entrenar els models que poden generar textos, respondre preguntes i, fins i tot, mantenir converses. Ens endinsarem en l'apassionant món de l'aprenentatge automàtic i veurem que les matemàtiques hi tenen un paper clau.

Problema de les tres gerres

Problema clàssic

Suposem que tenim 3 gerres amb capacitats 8, 5 i 3 litres. Que la gerra de 8 litres és plena i les altres buides. Podem passar aigua d'una gerra a l'altra mentre no hi hagi aigua a la primera o la segona no sigui plena. Puc aconseguir una gerra amb 4 litres?

Sí, és possible aconseguir una gerra amb 4 litres. A continuació et descripc un procés en què pots aconseguir-ho utilitzant les tres gerres (de 8, 5 i 3 litres):

1. Comencem amb les gerres en aquest estat:

- Gerra de 8 litres: 8 litres
- Gerra de 5 litres: 0 litres
- Gerra de 3 litres: 0 litres

El problema clàssic apareix en molt llocs d'internet i **ChatGPT coneix la resposta “de memòria”**.

Problema modificat

Suposem que tenim 3 gerres amb capacitats 10, 6 i 4 litres. Que la gerra de 10 litres és plena i les altres buides. Podem passar aigua d'una gerra a l'altra mentre no hi hagi aigua a la primera o la segona no sigui plena. Puc aconseguir una gerra amb 3 litres?

Sí, és possible aconseguir una gerra amb 3 litres utilitzant les tres gerres (de 10, 6 i 4 litres) i seguint una sèrie de passos. Aquí tens una possible solució:

1. Comencem amb les gerres en aquest estat inicial:

- Gerra de 10 litres: 10 litres
- Gerra de 6 litres: 0 litres
- Gerra de 4 litres: 0 litres

Pas 10: Transferim aigua de la gerra de 4 litres a la gerra de 6 litres fins que aquesta estigui plena.

- **Gerra de 10 litres:** 6 litres
- **Gerra de 6 litres:** 4 litres
- **Gerra de 4 litres:** 0 litres

Ara tenim exactament 3 litres a la **gerra de 10 litres**. Així que hem aconseguir el que volíem, tenir **3 litres en una gerra**.

Per tant, sí, és possible aconseguir una gerra amb 3 litres!

Conclusions

Conclusions

- Els nous **models de llenguatge** com ChatGPT són **eines molt potents**.
- No hem d'oblidar, però, que **l'objectiu d'un model de llenguatge és simplement predir la següent paraula més probable** per continuar un text.
- **Els càlculs** que fan aquests models **són únicament multiplicacions de matrius**, no hi ha cap sistema que pensi abans de donar la resposta.
- Hem d'utilitzar aquestes eines per **ajudar-nos en tasques de les quals podem validar la resposta**, ja que mai podem estar segurs de que la resposta del model sigui correcta.



Dins el cervell de ChatGPT

Matemàtiques en acció

Dissabtes de les matemàtiques 2025

Universitat Autònoma de Barcelona