3.3 Optimització

Selecció de problemes preparada per Aureli Alabert i Romero, professor d'Estadística i Investigació Operativa del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 29 41, e-mail: alabert@mat.uab.es.

3.3.1. Els carrers de Barcelona que suporten un volum considerable de trànsit rodat solen tenir els semàfors sincronitzats en "ona verda". Volem calcular l'interval de temps òptim entre la posada en verd d'un semàfor i la del següent per tal que el carrer pugui absorbir el major volum possible de vehicles (nombre de vehicles per unitat de temps). Per això suposarem:

- Distància de seguretat: Per tal que el risc d'accidents sigui prou baix, s'admet que la separació entre vehicles ha de ser de $v^2/100$ metres, si v és la velocitat expressada en km/h. Suposarem que els automobilistes respecten aquesta norma.
- Longitud dels vehicles: en mitjana, podem suposar que és de 4 metres.
- Separació entre semàfors: 100 metres (la de l'Eixample de Barcelona).

3.3.2. (*) Es vol construir una escola nova que ha de donar servei a dos pobles units per una carretera de 3 quilòmetres de longitud. Dos polítics discuteixen sobre el millor lloc per a situar-la. L'escola pot estar en un dels dos pobles, o a qualsevol lloc al llarg de la carretera. El poble A té n nens, i el poble B té m nens. Un dels polítics proposa situar l'escola en el punt que faci mínima la suma dels quadrats de les distàncies que hauran de recórrer tots els nens per arribar-hi. Busqueu aquest punt.
L'altre polític no veu per què tanta complicació amb elevar al quadrat les distàncies i proposa posar l'escola en el punt que faci mínima la suma de les distàncies, simplement. Busqueu el punt en aquest cas. Quina de les alternatives sembla més justa?

3.3.3. (*) Prop dels dos pobles del problema 3.3.2 es vol construir una estació de tren. La via és una recta que no passa per cap dels dos pobles, i que els deixa a la mateixa banda. Es tracta de buscar el punt de la via on cal posar l'estació de manera que cap dels dos pobles es pugui queixar. Els dos pobles tenen un nombre similar d'habitants, de manera que per a calcular aquest punt equitatiu només cal considerar les distàncies dels pobles al punt de la via on es construirà l'estació. Quin és el punt òptim si el que es vol es fer mínima la suma dels quadrats de les distàncies de cada poble a l'estació?
Suposem ara que volem fer mínima la suma de les distàncies (sense quadrats). El punt òptim es pot obtenir de la manera següent: Anomenem A i B els punts on es troben els pobles. Dibuixem el punt B_1 simètric de B respecte la via. Tracem la recta AB_1. El punt D que busquem és el punt d'aquesta recta que cau sobre la via. Demostreu això considerant un altre punt D' sobre la via i veient que $|AD'| + |D'B| > |AD| + |DB|$.

3.3.4. (*) Dues persones juguen al joc següent: Hi ha sobre la taula dues piles de monedes. Se sap la quantitat de monedes de cada pila. El jugadors, per torn, escullen una pila, i en retiren la quantitat de monedes que desitgin (almenys una). Perd la partida el jugador que retira l'última moneda de la taula.
És clar que el joc s'acaba en algun moment o altre i que no hi ha mai empat (un

jugador perd i l'altre guanya). Es tracta d'esbrinar l'estratègia òptima per a guanyar, i determinar si té importància o no ser el primer jugador que agafa monedes. Per a fer això seguiu els passos següents:

0. (Notacions.) Escriurem (n, m) per a indicar que en un moment determinat hi ha n monedes a la primera pila, i m a la segona. Aquests parells de nombres representaran una *posició* durant la partida. Si podem assegurar que en una determinada posició (n, m) el jugador que té el torn perdrà la partida (suposant que el contrincant no s'equivoqui), direm que (n, m) és una *posició perdedora*; si, al contrari, podem assegurar que el que té el torn guanyarà (si juga sense equivocar-se) direm que (n, m) és una *posició guanyadora*.
1. Observeu que $(1, 0)$ i $(0, 1)$ són posicions perdedores.
2. Deduïu que $(n, 0)$, $(0, n)$ per a $n \geq 2$, i $(n, 1)$, $(1, n)$ per a $n \geq 1$, són posicions guanyadores.
3. Deduïu que $(2, 2)$ és una posició perdedora.
4. Continueu aquesta anàlisi per a trobar totes les posicions guanyadores i perdedores d'aquest joc. Deduïu quina estratègia cal seguir per a guanyar. Determineu si és important o no ser el jugador que comença, i, en cas afirmatiu, què preferiríeu.

3.3.5. (*) Entre tots els polígons regulars amb una superfície fixada, trobeu el que té perímetre màxim.

3.3.6. (*) Volem trobar dues quantitats positives x_1 i x_2 de forma que el valor de $x_1 + x_2$ sigui al més gran possible, però respectant les desigualtats $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ i $7x_1 + 4x_2 \leq 28$. Això es pot fer gràficament:
Traceu les rectes $2x_1 + 3x_2 = 12$ i $7x_1 + 4x_2 = 28$ sobre uns eixos coordenats. Els valors de (x_1, x_2) que satisfan totes les condicions estan representats pels punts a l'interior del quadrilàter determinat per les rectes dibuixades i els eixos coordenats. Dibuixeu també unes quantes rectes del tipus $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 2$, ... Totes elles són paral·leles, i es desplacen cap a la dreta i amunt quan augmentem el terme independent. D'aquí deduïm que el màxim valor de la suma $x_1 + x_2$ dins del quadrilàter s'obté en el punt intersecció de les rectes $2x_1 + 3x_2 = 12$ i $7x_1 + 4x_2 = 28$, que és $x_1 = 36/13$ i $x_2 = 84/39$. El valor de la suma és $x_1 + x_2 = 192/39$. Consulteu també la secció 2.7.

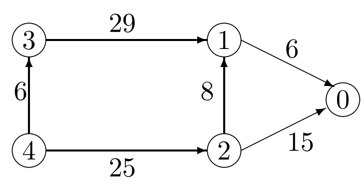
Apliqueu aquest mètode a la situació següent: una fusteria fabrica cadires i taules. Per cada cadira obté un benefici de 100 euros; per cada taula, 200 euros. Cada cadira ocupa 1 hora de màquina i 3 hores de personal; cada taula ocupa 3 hores de màquina i 2 hores de personal. Es disposa de 40 hores setmanals de màquina i de 80 hores setmanals de personal. Quantes taules i cadires cal fabricar setmanalment per tal que el benefici de la fusteria sigui màxim?
(Encara que el resultat sigui un número fraccionari de taules i cadires, es pot interpretar com un "ritme de producció setmanal".)

3.3.7. (*) Apliqueu la tècnica del problema 3.3.6 per a resoldre la qüestió següent:
Un granger vol que cadascuna de les seves vaques rebi diàriament com a màxim 18 quilocalories (kcal), almenys 2 quilograms de proteïnes, i almenys 2.8 grams de vitamines. Disposa de dos tipus de pinso que pot barrejar en qualsevol proporció, amb les característiques que s'indiquen a continuació (per quilogram).

Pinso	Cost (eu)	kcal	Proteïnes (kg)	Vitamines (g)
1	0.8	3.6	0.25	0.7
2	0.6	2	0.40	0.4

El granger vol fer mínim el cost d'alimentació de les vaques tot mantenint les condicions anteriors. Quina quantitat de pinso de cada tipus cal donar a les vaques cada dia?

3.3.8. (*) Observeu l'esquema següent. Les fletxes representen camins a través d'un bosc, que uneixen diverses cases, representades per cercles. Els números sobre les fletxes indiquen els minuts estimats per a fer cada camí. Volem anar de la casa 4 a la casa 0 en el mínim temps possible.



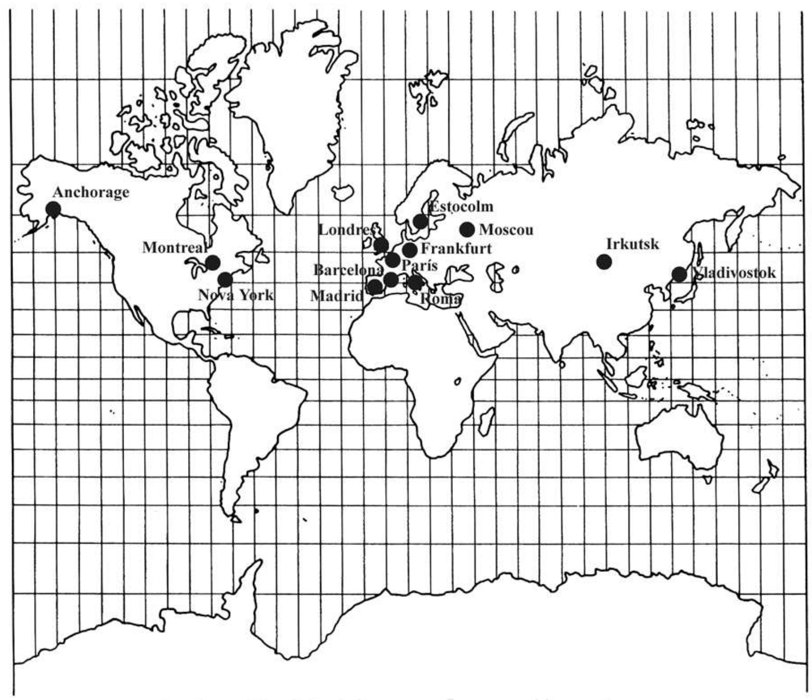
Per obtenir el recorregut òptim, dividirem el problema en diverses etapes, que numerarem 1,2,3,4. A l'etapa n, calcularem el recorregut òptim des de la casa n fins a la casa 0. A l'etapa 4, doncs, trobarem el que busquem.
A l'etapa 1 no cal decidir res, perquè només hi ha un camí possible, i el temps que emprarem és de 6 minuts. Escriurem que $t_1 = 6$.
A l'etapa 2, mirem si és millor anar de la casa 2 a la casa 1 i d'allà a la 0, o bé anar directament a la casa 0. Veiem que és millor el recorregut $2 \to 1 \to 0$, amb 14 minuts. Escriurem $t_2 = 14$.
A l'etapa 3 no hi ha res a decidir: Obtenim $t_3 = 35$, amb el recorregut $3 \to 1 \to 0$.
A l'etapa 4, finalment, mirem si és millor anar de la casa 4 a la 3 (6 minuts + $t_3 = 41$) o bé anar de la 4 a la 2 (25 minuts + $t_2 = 39$). És millor aquesta última opció. El recorregut òptim que buscàvem és doncs $4 \to 2 \to 1 \to 0$.

Apliquem ara aquest mètode a un problema més complicat: som a Vladivostok i hem de retornar amb urgència a casa, a Barcelona. A l'aeroport ens informen de les rutes que podem seguir, amb el preu de cada trajecte. La nostra prioritat és que el preu total sigui al més petit possible. Aquestes són les dades, amb els preus en euros:

Vladivostok $\longrightarrow$ Irkutsk: 100
Vladivostok $\longrightarrow$ Anchorage: 180
Irkutsk $\longrightarrow$ Moscou: 120
Anchorage $\longrightarrow$ Montreal: 220
Anchorage $\longrightarrow$ Nova York: 200
Moscou $\longrightarrow$ Roma: 300
Moscou $\longrightarrow$ Frankfurt: 250
Moscou $\longrightarrow$ Estocolm: 250
Montreal $\longrightarrow$ Estocolm: 200
Montreal $\longrightarrow$ Londres: 300
Nova York $\longrightarrow$ Londres: 250
Nova York $\longrightarrow$ París: 270

Nova York $\longrightarrow$ Madrid: 290
Estocolm $\longrightarrow$ París: 200
Roma $\longrightarrow$ Barcelona: 150
Frankfurt $\longrightarrow$ Barcelona: 180
Londres $\longrightarrow$ Barcelona: 160
París $\longrightarrow$ Barcelona: 140
Madrid $\longrightarrow$ Barcelona: 100

Feu un esquema com abans i busqueu la ruta més econòmica.



3.3.9. (**) Un professor planteja les tres preguntes següents en un examen:

1. Entre tots els triangles rectangles amb la suma de les longituds dels catets fixada, busca el que té àrea màxima.
2. Entre tots els rectangles inscrits en una circumferència, busca el que té àrea màxima.
3. La nota d'aquest examen serà la mitjana de les puntuacions a i b del problema 1 i el problema 2. Escull quina mitjana vols que et faci: La *mitjana aritmètica* $(a+b)/2$, *la mitjana geomètrica* $\sqrt{ab}$, o la *mitjana quadràtica* $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$.

A partir del resultat de la pregunta 1, deduïu que la mitjana geomètrica és sempre més petita o igual que la mitjana aritmètica. A partir del resultat de la pregunta 2, deduïu que la mitjana aritmètica és sempre més petita o igual que la mitjana quadràtica. La pregunta 3 queda, doncs, "contestada". Comproveu també que si obteniu la mateixa nota en els dos problemes, us és ben igual quina mitjana faci el professor.