

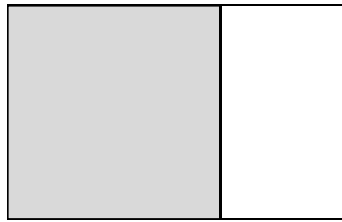


3.1 Geometria

Selecció de problemes preparada per Gregori Guasp i Balaguer, professor de Geometria i Topologia del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. tel.: 93 581 15 05, e-mail: guasp@mat.uab.es.

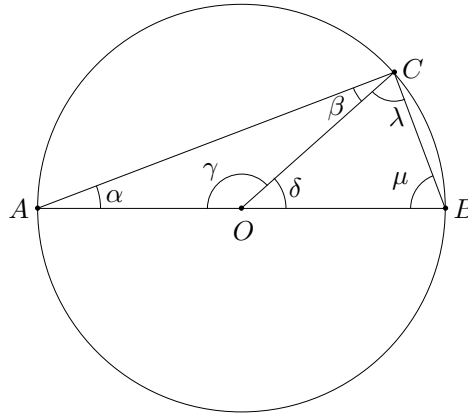


- 3.1.1.** Quina és la proporció que hi ha entre els costats d'un rectangle tal, que el rectangle que queda, quan es treu el quadrat determinat pel costat més petit (mireu el dibuix), segueix tenint la mateixa proporció entre els seus costats?



Nota: Aquesta proporció s'anomena la *raó d'or*.

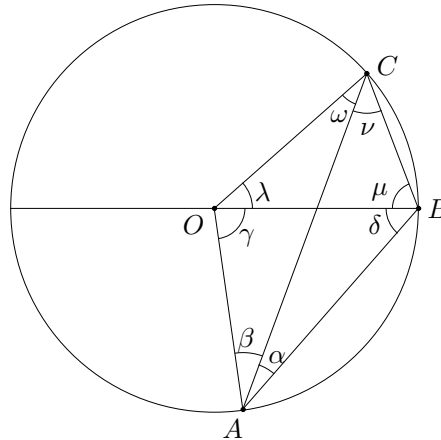
- 3.1.2.** En la figura següent, A i B representen punts diametralment oposats d'una circumferència de centre O , i C és un altre punt de la mateixa circumferència. Els angles dels triangles OAC i OBC estan marcats amb les lletres α , β , γ , δ , λ i μ .



- (a) Demostreu que la suma dels angles β i λ és un angle recte.
 (b) Quina relació hi ha entre els angles α i δ ?

(Ind: *Alguns dels triangles són isòsceles.*)

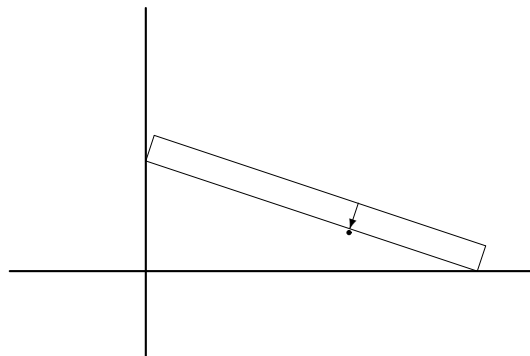
- 3.1.3.** (*) Siguin A , B i C punts d'una circumferència de centre O representats en la figura següent:



- Quants triangles isòsceles es poden trobar en la figura?
- Quina relació hi ha entre l'angle α i l'angle λ ?
- Si considerem un altre punt qualsevol D de la mateixa circumferència, quina relació hi haurà entre l'angle que determinen les cordes DC i DB i l'angle α ?

3.1.4. (*) Abans de contestar cap pregunta, realitzeu l'experiment següent:

Retalleu una tira de paper d'uns 10 cm de longitud i sobre un dels costats feu un senyal. Sobre un full de paper dibuixeu un parell de rectes perpendiculars i, posant cada un dels extrems de la tira de paper en un d'aquests eixos, marqueu el lloc on queda el senyal que heu fet com es mostra en el dibuix següent:



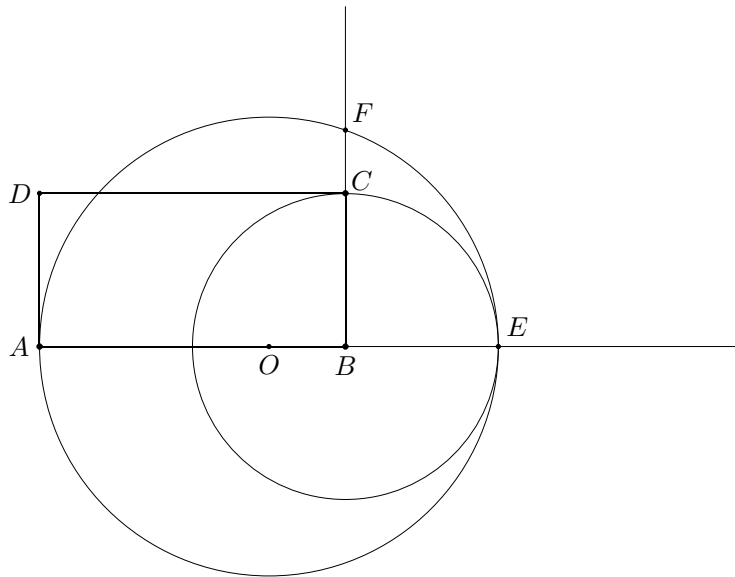
Aneu movent la tira de paper procurant mantenir els extrems sobre els eixos i apareixerà una certa corba.

- Quin tipus de corba és la corba que apareix? Què passarà si el punt que marquem és el punt mig de la tira de paper?
- Si la marca que heu fet divideix la tira de paper en dues parts de longituds a i b i considerem que les dues rectes que hem dibuixat són els eixos de coordenades, quina és, en funció de a i b , l'equació de la corba que apareix?

- 3.1.5.** (**) Considereu la circumferència de radi 1 centrada en el punt $(0, 1)$, que és la que té per equació $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, i determineu l'equació dels punts $P = (x, y)$ tals que la distància que hi ha de P a l'eix de les x és igual a la distància que hi ha entre P i la circumferència.

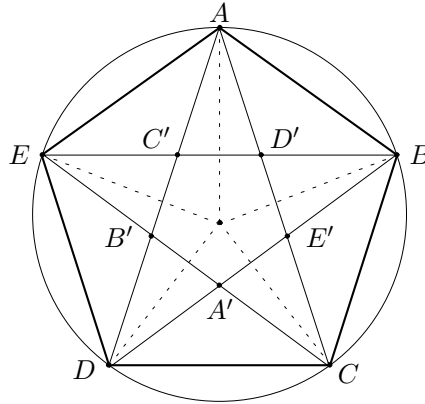
Quin tipus de corba apareix si es consideren els punts equidistants d'una circumferència i una recta qualsevol?

- 3.1.6.** Dibuixeu un rectangle de 9 cm per 4 cm. Marqueu els vèrtexs amb les lletres A, B, C i D de tal forma que AB i CD siguin els costats de 9 cm i BC i AD els de 4 cm. Allargueu per B el costat AB i per C el costat BC . Amb el compàs, dibuixeu la circumferència de centre B i radi BC i marqueu com E el punt d'intersecció, que queda fora del rectangle, d'aquesta circumferència amb la recta AB . Sigui O el punt mig del segment AE . Ara dibuixeu la circumferència de centre O i radi OA . Marqueu com F el punt d'intersecció de la semirecta BC amb aquesta nova circumferència. Quina és la longitud de BF ? Quina relació trobeu que hi ha entre aquesta longitud i l'àrea del rectangle?



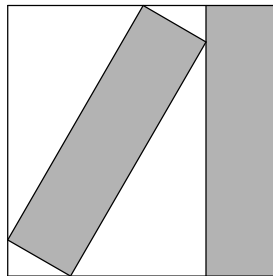
Si us fixeu, l'angle entre AF i EF és un angle recte. Utilitzeu el teorema de Pitàgores per a veure que fent aquesta construcció sempre tindrem l'alçada BF igual a l'arrel quadrada de l'àrea del rectangle.

- 3.1.7.** (**) Siguin A, B, C, D i E els vèrtexs d'un pentàgon regular tal com està representat en el dibuix següent:



Els segments AB , BC , CD , DE i EA són els *costats* del pentàgon, mentre que els segments AC , CE , EB , BD i DA són les *diagonals*.

- Quina és la mesura de l'angle que formen dos costats consecutius? (per exemple, l'angle entre AB i AE).
 - Quina és la mesura de l'angle que formen les diagonals amb els costats? (per exemple, l'angle entre AB i AC).
 - Quina és la mesura de l'angle entre les dues diagonals que arriben a cada vèrtex? (per exemple, l'angle entre AC i AD).
 - Comproveu que els triangles ADC i DCE' són triangles semblants, és a dir, tenen els mateixos angles.
 - Comproveu que la raó que hi ha entre la longitud de la diagonal i la longitud del costat és la raó d'or.
 - Quin és el valor de $\cos(\pi/5)$ i $\sin(\pi/5)$? (els angles en radians!)
- 3.1.8.** (*) En la figura següent, el quadrat exterior té costat 1 i els dos rectangles grisos són iguals.



Quina és l'àrea d'aquests rectangles?