Article preparat per Armengol Gasull per al llibre *Fes Matemàtiques!* (pàgs. 79–82).
Editat pel Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.
http://www.uab.cat/matematiques

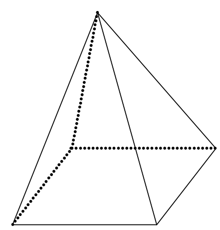
2.16 La característica d'Euler. La fórmula de Pick

Hi ha un resultat d'Euler, provat el 1758, que se sol incloure a tots els llibres elementals de matemàtiques ja que és molt bàsic i senzill d'enunciar. Aquest resultat l'anomenarem en aquestes notes teorema d'Euler i ens diu que si considerem un políedre (amb unes certes propietats que especificarem tot seguit) i denotem per

c, el número de cares que té,
a, el número d'arestes que té,
v, el número de vèrtexs que té,

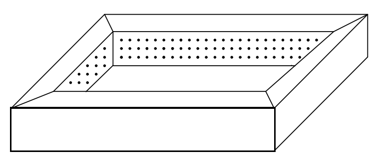
aleshores $c - a + v = 2$.

Per exemple, si prenem la piràmide següent



$c = 5$, $a = 8$, $v = 5$, i per tant $c - a + v = 5 - 8 + 5 = 2$, tal com diu la fórmula d'Euler.

En canvi, si prenem la figura



$c = 16$, $a = 32$, $v = 16$ i per tant $c - a + v = 16 - 32 + 16 = 0$.

Anem, doncs, en primer lloc, a fixar el tipus de políedres que considerarem i, en segon lloc, a veure per què per a aquests políedres es compleix la fórmula

$$c - a + v = 2.$$

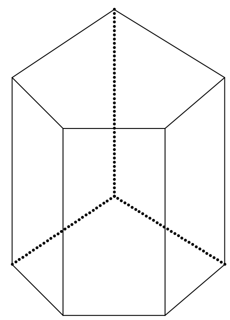
Normalment, donat un políedre P, el nombre $c - a + v$ s'anomena la característica d'Euler de P i es denota per $\chi(P)$. Així, en altres paraules, veurem per què $\chi(P) = 2$ sempre que P sigui un políedre amb les propietats següents:

1. El políedre és tal que si les cares fossin de goma i el poguéssim inflar es tornaria com una pilota. Tècnicament es diu que és un políedre homeomorf a una esfera. Observeu que el segon políedre un cop inflat es convertiria en un "dònut"en lloc d'una pilota.

2. Cada una de les cares del políedre són polígons sense forats: és a dir, la vora del polígon és una única corba tancada.

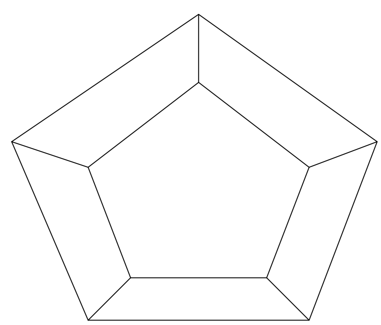
3. Cada aresta és comuna a només dues cares.

Seguirem les idees de la demostració que va donar Cauchy a 1813, per a un políedre concret. Pendrem un prisma pentagonal



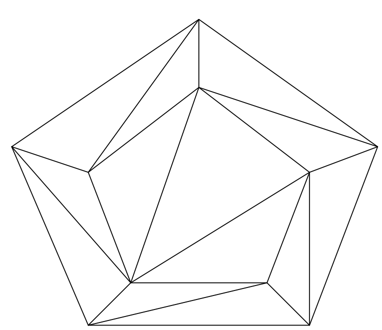
Pas 1

Traiem una cara, per exemple la tapa superior. La figura resultant hauria de complir que $c - a + v = 1$ (n'hem tret una cara). Representem el resultat aplanat com la figura següent (això es pot fer pel fet que P compleix la propietat 1).



Pas 2

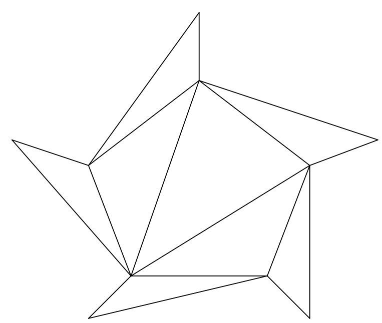
Triangulem totes les cares sense afegir-hi cap vèrtex nou. Observeu que si es triangula qualsevol polígon, sense afegir-hi vèrtexs, un polígon de k costats queda dividit en $k-2$ triangles (augmentant $k-3$ cares), afegint 0 vèrtexs i $k-3$ arestes (aquí s'usa la propietat 2). Per tant, el nombre total $c - a + v$ no variarà.



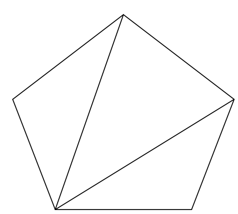
Pas 3

Ara anem eliminant triangles de la figura, prenent-los de la seva vora. Observem que podem eliminar dos tipus de triangles.

- Eliminem una aresta, i un triangle desapareix. En aquest cas, cada eliminació esborra una cara i una aresta; per tant, $c-a+v$ no varia. A la figura veiem com queda el nostre polígon aplanat i triangularitzat un cop hem eliminat cinc d'aquests triangles



- Eliminem dues arestes, i el triangle desapareix. En aquest cas cada triangle eliminat esborra una cara, dues arestes i un vèrtex. De nou $c-a+v$ no varia. La figura anterior, després de cinc eliminacions, queda com la figura següent:



Pas 4

Un cop fetes les eliminacions, queda un sol triangle (en aquest cas ens faltaria fer dues eliminacions). Per a aquest triangle final, $c = 1$, $a = 3$, $v = 3$ i per tant $c - a + v = 1$ com volíem veure. Per tant, hem vist per què el teorema d'Euler que ens assegura que $\chi(P) = 2$ és cert per als prismes que considerem.

Aquesta exposició està basada en el llibre *Meu Professor de Matemática,* d'E. Lages Lima, Coleção do Professor de Matemática, Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

La fórmula de Pick

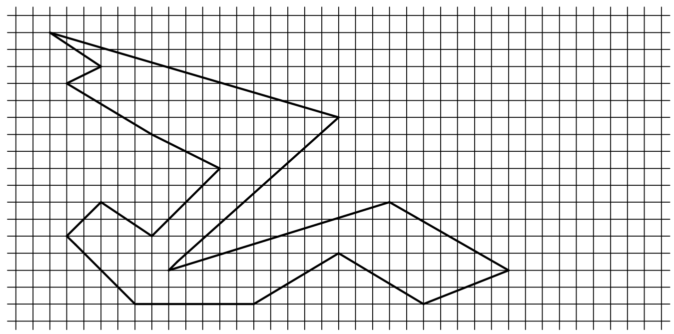
Acabarem aquesta secció amb un resultat curiós. Aquest resultat, provat pel matemàtic txec G. Pick el 1899, i conegut amb el nom de fórmula de Pick, ens proporciona una manera útil per a calcular àrees de polígons P amb vèrtexs en una quadrícula i per als quals la seva vora és una única corba tancada. El seu enunciat recorda en certa manera la fórmula de la característica d'Euler.

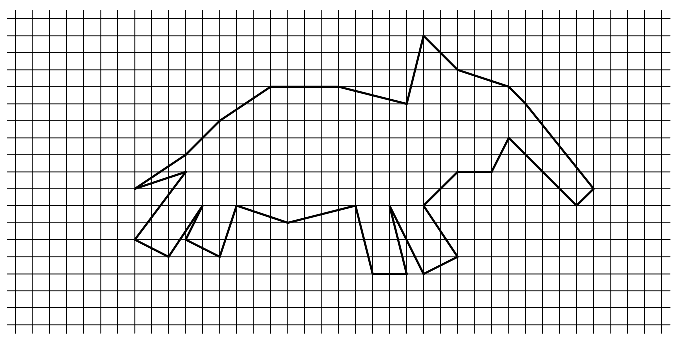
Sigui P un d'aquests polígons. Aleshores la fórmula de Pick ens diu que l'àrea que envolta, $A(P)$ es pot calcular com

$$A(P) = \frac{a(P)}{2} + c(P) - 1,$$

on $a(P)$ és el número de punts de la quadrícula que són a la vora de P, i $c(P)$ és el número de punts de la quadrícula que són a l'interior de P.

Vegeu dues figures per a les quals la fórmula es pot aplicar. Per exemple, a la figura inferior, $a(P) = 42$, $c(P) = 146$, i per tant $A(P) = 21 + 146 - 1 = 166$.





Intenteu fer una demostració d'aquesta fórmula basada en una triangularització de P i en el fet que un triangle ple, tal que només té com a punts de la quadrícula els vèrtexs, té sempre àrea $1/2$.