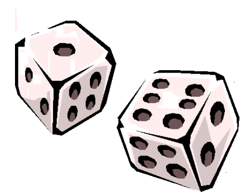
Article preparat per Frederic Utzet per al llibre *Fes Matemàtiques!* (pàgs. 102–107).
Editat pel Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.
http://www.uab.cat/matematiques

2.22 Matemàtiques i finances: el descobriment d'un nou món

Jocs justos

Abans de parlar de finances repassarem la noció de joc just. Per a començar, cal dir que tots els jocs del casino (excepte el BlackJack si s'hi sap jugar bé) són –lleugerament– favorables al casino: en un sol dia passen molts jugadors; alguns guanyen, altres perden, però el casino aprofita el seu petit avantatge per a anar guanyant diners, de forma lenta però segura (en cas contrari, qui voldria instal·lar un casino?). S'explica la següent anècdota del propietari d'un casino que es deia Blanc; com sabeu tots, a la ruleta la jugada més típica és apostar que sortirà un nombre negre o un nombre vermell. Diuen que el Sr. Blanc es passejava entre les taules de la ruleta i mentre feia una rialleta murmurava "Jugueu negre, jugueu vermell, que Blanc sempre guanya".



Des de l'altre punt de vista, un jugador al casino pot tenir molt bona sort un dia, però si insisteix i juga un dia i un altre i un altre... segur que acaba arruïnat. Un exemple extrem d'aquesta situació és la història d'un jugador japonès, el Sr. Akio Kashiwaki, que tenia fama d'anar a un casino, seure en una ruleta i estar apostant cada vegada 200 000 dòlars al mateix color fins que feia saltar la banca; sembla que mentre durava el joc anava prenent notes dels resultats com si estigués fent un estudi experimental. En l'argot, aquesta mena de jugadors se'ls anomena *balenes*. La balena japonesa Kashiwaki va anunciar al desembre del 1989 que aniria a jugar a un casino d'Atlantic City. Els encarregats del casino, preocupats, van consultar el matemàtic Sr. Jess Marcum sobre què havien de fer. De les informacions disponibles es desprèn que el matemàtic els va aconsellar que la banca mai no es retirés del joc; que a la llarga el jugador acabaria perdent i que les probabilitats de perdre del jugador anaven augmentant com més durava el joc. Els del casino varen seguir el consell; en acabar el tercer dia de joc el jugador japonès anava guanyant 5 milions de dòlars; després les coses es varen començar a anivellar i, finalment, després 5 066 jugades en 70 hores de joc, el jugador japonès es va retirar perdent més de 9 milions de dòlars. (Podeu llegir els detalls dels càlculs sobre aquesta partida a l'article de C. A. Coyle i C. Wang, *Wanna Bet? On gambling strategies that may or may not work in a casino*, The American Statistician, Maig del 1993, vol. 47, núm. 2, pp. 108-111).

Per a formalitzar la idea de l'avantatge del casino, analitzarem un joc ben senzill. Suposem que participem en un joc a cara i creu i que apostem 10 ptes. de la manera següent:

- Si surt cara, guanyem 15 ptes. (és a dir, ens tornen les 10 ptes. i 15 ptes. més)
- Si surt creu, perdem les 10 ptes.

Si la moneda no està trucada, la probabilitat de cara i de creu són la mateixa i igual a 1/2; és a dir, si tirem molts cops la moneda, aproximadament la meitat de les vegades guanyarem i l'altra meitat perdrem. En resum, si per exemple juguem 1000 cops

$$\begin{aligned} \text{Guanys} &\approx 500 \times 15 = 7500 \text{ ptes,} \\ \text{Pèrdues} &\approx 500 \times 10 = 5000 \text{ ptes.} \end{aligned}$$

De manera que el guany total serà, aproximadament,

$$\text{Guany total} \approx 500 \times 15 - 500 \times 10 = 2500 \text{ ptes.}$$

i el guany mitjà per jugada serà

$$\text{guany mitjà per jugada} \approx \frac{2500 \text{ ptes.}}{1000 \text{ jugades}} = 2.5 \text{ ptes/jugada.}$$

Notem que

$$\text{Guany mitjà per jugada} \approx \frac{5000 \times 15 + 500 \times (-10)}{1000} = 15\,\frac{1}{2} + (-10)\,\frac{1}{2},$$

és a dir, 15 per la probabilitat de guanyar sumat amb -10 per la probabilitat de perdre. Aquesta expressió de la dreta s'anomena ***l'esperança matemàtica*** del joc. Aquest joc que estem analitzant ens és favorable: si juguem un cop o dos, podem tenir mala sort i perdre; però si hi juguem molt, a la llarga acabarem guanyant, en mitjana 2.5 ptes. per jugada. Però si ens és favorable a nosaltres, serà desfavorable a l'altre jugador. Un joc es diu ***just*** si l'esperança del joc és 0. Per exemple, el joc a cara o creu però amb guanys 10 i -10 és un joc just: avui puc guanyar jo i demà també, però si hi juguem molt sovint, en mitjana ni jo ni el meu contrincant hi haurem guanyat ni perdut res (haurem passat l'estona!).

També és important observar que un joc injust es pot convertir en joc just fent pagar una quantitat per a participar-hi. Així, al joc del principi amb la moneda on guanyava 15 o perdia 10 podria fer pagar 2.5 ptes. per a jugar una partida. Llavors el resultat seria

$$\boxed{\begin{array}{rl} 15 - 2.5 = 12.5 & \text{ptes. amb probabilitat } 1/2, \\ -10 - 2.5 = -12.5 & \text{ptes. amb probabilitat } 1/2. \end{array}}$$

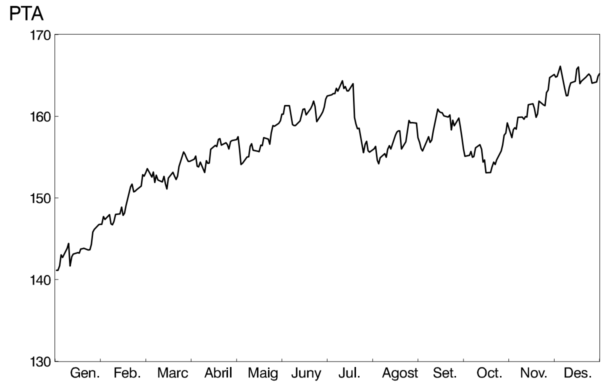
que és un joc just.

Si es calcula l'esperança matemàtica de les apostes de la ruleta, etc. donen totes favorables al casino. El fet que als casinos facin pagar entrada per a participar en un joc injust és allò que els clàssics en deien *cornuts i pagar el beure*.

Parlem de finances. Comencem amb uns exemples

Suposem que al mes de març decideixes que al mes de juliol aniràs dues setmanes als Estats Units i t'han dit que l'estada et costarà 500 dòlars. Suposem també que tens els diners estalviats per al viatge; un dòlar a Barcelona costa al mes de març 170 ptes. (arrodoneixo les quantitats per a fer càlculs més fàcils) i sembla que la tendència del dòlar és anar pujant; per tant, seria prudent canviar avui les pessetes per dòlars i guardar-los per a l'estiu. Però com que res no és segur, també podria ocórrer que el dòlar baixés d'aquí a l'estiu i que t'anés millor esperar al juliol per a comprar els dòlars. Què fer? Estàs en una situació dominada per la incertesa: com en un joc d'atzar! Pots prendre una decisió –comprar ara els dòlars o esperar a l'estiu– i hi ha unes expectatives de guanys o pèrdues.

En la mateixa situació, però de manera molt més greu i seriosa, es troben totes les empreses i negocis. Considerem, per exemple, una fàbrica que produeix ordinadors i unes peces les compra al Japó, de les quals en necessitarà un nombre determinat d'aquí a tres mesos. Si creu que les peces pujaran de preu, podria comprar-les ara i emmagatzemar-les; però podria ser que baixessin de preu o fins i tot que canviés la tecnologia i quedessin obsoletes. Què ha de fer?



Canvi dòlar/PTA durant l'any 1999

Introduïm les probabilitats

Els exemples anteriors tenen en comú, entre altres coses, l'ambient d'incertesa i la manera habitual de tractar-la és mitjançant les probabilitats. Retornem a l'exemple del viatge als Estats Units. Per a simplificar l'exposició, suposem que del març al juliol el preu del dòlar només canviarà pujant 30 ptes. o baixant-ne 20. Així, el preu que tindrà el dòlar al juliol serà 200 ptes. o 150 ptes. Ara podríem intentar quantificar la incertesa associada amb l'evolució futura del dòlar mitjançant una probabilitat: posem que la probabilitat que el dòlar pugi és p i la probabilitat que baixi és $1-p$ $(0 \leq p \leq 1)$. Tenim, així,

Preu d'un dòlar

Març: 170 ptes.

$$\text{Juliol: } \begin{cases} 200 & \text{ptes. amb probabilitat } p, \\ 150 & \text{ptes. amb probabilitat } 1-p. \end{cases}$$

Aquest plantejament, tot i la seva simplicitat, és molt important i s'anomena model de Cox-Ross-Rubinstein.

En lloc de decidir ara si canviar o no les pessetes en dòlars pots comprar una ***opció de compra*** (en anglès es diu un *call*), que consisteix a adquirir el dret, però no l'obligació, de comprar dòlars l'1 de juliol a un preu que es fixa avui: posem 180 ptes. per dòlar (s'anomenna *preu d'exercici*).

- Si al juliol el dòlar puja, tancaràs el tracte (exercint el dret) i compraràs els dòlars a 180 ptes.
- Si el dòlar baixa, compraràs directament els dòlars a un altre venedor.

Però per a adquirir una opció de compra de dòlars cal pagar alguna cosa, ja que, en cas contrari, ningú no voldria participar venent l'opció: tu tindries tots els avantatges i el venedor tots els inconvenients. La quantitat que cal pagar s'anomena la ***prima***. El problema que ens plantegem és com calcular aquesta quantitat.

Una mica d'història

A l'edat mitjana els agricultors i comerciants van començar a utilitzar els ***contractes de futurs***, que consisteixen (encara s'utilitzen) en un acord de compra o venda d'un producte a un preu determinat en una data; per aquests contractes no cal pagar res, però l'acord és ferm: el comprador i venedor han de fer l'operació pactada sigui quin sigui el preu del mercat. Per a continuar amb l'exemple, tu podries fer al març un contracte de futurs amb un venedor de dòlars acordant la compra de 500 dòlars a 190 ptes. l'1 de juliol. Arribats a l'1 de juliol, l'operació s'hauria de fer i comprar els dòlars al preu estipulat, de manera que si el dòlar baixés a 150 ptes., hi perdries diners respecte al preu de mercat; si el dòlar pugés a 200 ptes., compraries els dòlars a un bon preu.

Al segle *XVII* a Holanda es varen començar a fer opcions (de compra o venta) de bulbs de tulipa, amb la diferència respecte als futurs que el comprador de l'opció té un dret però no pas un deure. De seguida es van començar a fer opcions sobre accions d'empreses i, a través d'una història no sempre fàcil, les opcions s'han anat consolidant com un producte financer d'extrema importància. Actualment hi ha opcions de moltes menes i sobre tota mena de productes, i aquesta tendència va a més. A les pàgines econòmiques de qualsevol diari hi ha informació sobre els diferents mercats d'opcions.

Un salt qualitatiu absolutament fonamental en el mercat d'opcions va ser quan els economistes americans F. Black i M. Scholes van proposar el 1973 un mètode racional per a calcular la prima de les opcions (el preu a pagar). Scholes va rebre, juntament amb Merton, el 1997 el premi Nobel d'economia per aquest descobriment (Black va morir el 1995). La conclusió d'aquest mètode és l'anomenada fórmula de Black-Scholes, d'ús constant als mercats d'opcions, als bancs, etc. Tot i que la fórmula final és molt senzilla, la demostració utilitza mètodes sofisticats de processos estocàstics (que tracten de modelitzar fenòmens que evolucionen en el temps segons les lleis de l'atzar –és a dir, fenòmens aleatoris o estocàstics). A partir de l'any 1973, una branca de les matemàtiques que s'havia anat desenvolupant –l'Anàlisi Estocàstica– va trobar una nova i importantíssima font d'aplicacions, i molts matemàtics purs varen ser captivats per la possibilitat d'aplicar la teoria ja feta i de desenvolupar noves teories per als problemes que la realitat suggeria: va ser el descobriment d'un nou món per als matemàtics.

Però, com es valora una opció?

Per a valorar una opció, primerament cal notar que el valor d'una opció es basa en el preu del producte al que fa referència (en el nostre exemple, en el canvi dòlar/pesseta) i en les probabilitats d'aquest preu al moment d'executar l'opció (la p d'abans). Però, com calcular aquesta probabilitat? En principi, cada persona pot considerar la probabilitat que cregui convenient; així hom pot pensar que la probabilitat que el dòlar pugi és 0.9, i un altre que és 0.3; es tracta de probabilitats subjectives. La idea –genial– és que cal buscar les probabilitats que fan que comprar i vendre dòlars sigui un joc just. El mercat sempre es comporta per a la majoria de gent (després comentarem la minoria) com un joc just, ja que altrament no hi hauria participants: a la borsa uns hi guanyen perquè altres hi perden, i els guanyadors i perdedors no poden ser sempre els mateixos (això és, de fet, més complex, ja que cal tenir en compte l'evolució al llarg del temps, l'increment del preu del diner, i altres factors). Aplicat al nostre problema, és tracta de la manera següent: algú compra un dòlar al més de març. El resultat del joc serà el valor del dòlar l'1 de juliol, que hem quedat que és

$$\boxed{\begin{array}{ll} 200 & \text{ptes. amb probabilitat } p, \\ 150 & \text{ptes. amb probabilitat } 1-p. \end{array}}$$

L'esperança matemàtica d'aquest joc és

$$\text{Esperança} = 200\,p + 150\,(1-p).$$

El preu al qual es compraria el dòlar al març, posem 170 ptes., és el preu per a participar en el joc. Així, per a què el joc sigui just cal que

$$\boxed{200\,p + 150\,(1-p) = 170.}$$

La solució és

$$\boxed{p = 0.4.}$$

Cal remarcar que aquest mètode és una manera objectiva de calcular les probabilitats i que, per tant, el comprador i el venedor de l'opció poden estar d'acord; però no representa la probabilidad d'evolució futura. Ara tornem a l'opció. També el comprador i el venedor de l'opció han de participar en un joc just. Això vol dir que el preu per a participar en el joc ha de ser igual a l'esperança matemàtica del joc; concretament, la prima, P, ha de ser

$$\boxed{P = (500 \times (200-180)) \times 0.4 + 0 \times 0.6 = 4000 \text{ ptes.}}$$

D'aquesta manera, el resultat de l'opció l'1 de juliol serà:

- Si el dòlar puja, l'opció s'executa i en total hauràs pagat
  $$500 \times 180 + 4\,000 = 94\,000 \text{ ptes.}$$
- Si el dòlar baixa, aleshores compres directament els dòlars, i en total hauràs gastat
  $$500 \times 150 + 4\,000 = 79\,000 \text{ ptes.}$$

Comparem en el quadre següent la diferència entre comprar dòlars al juliol amb opció o sense:

	Sense opció	**Amb opció**	**Diferència**
El dòlar puja	100 000	94 000	6 000
El dòlar baixa	75 000	79 000	−4 000
Variació	25 000	15 000	

Per tant, amb l'opció de compra aconseguim que la variació entre els possibles diners que haurem de pagar sigui menor; concretament, hem reduït la diferència entre els preus quan puja o baixa el dòlar en un 40% (10 000 ptes. sobre 25 000). Aquest mateix raonament el podem fer per a una empresa que sap que haurà de pagar una factura d'un milió de dòlars al cap de tres mesos i amb les opcions aconsegueix reduir la incertesa de la factura que haurà de pagar.

D'altra banda, el venedor de l'opció pot utilitzar hàbilment les 4 000 ptes. de la prima per a no guanyar-hi ni perdre-hi res, vagin com vagin les coses; això s'anomena una cobertura.

A més d'adquirir una opció per necessitat, com seria el cas del teu viatge, o el d'una empresa d'ordinadors que ha comprar peces al Japó o pagar una factura en dòlars al cap d'uns quants mesos, també es pot adquirir una opció per a especular: algú que intueix que el dòlar pujarà a l'estiu pot adquirir una opció de compra de dòlars; si el dòlar puja, llavors executa l'opció, compra els dòlars a 180 ptes. i els torna a vendre immediatament a 200 ptes. Si el dòlar baixa, llavors naturalment no exerceix l'opció ni compra dòlars; en total, haurà perdut la prima: ha fet una aposta i ha perdut. També cal dir que si el dòlar pugés, al mercat d'opcions li farien tota l'operació sense haver de comprar i vendre els dòlars: directament li abonarien la diferència.

Les opcions tenen molts avantatges. En la meva opinió, el més important és el següent: hem vist que al mercat d'opcions hi participen tres classes de persones, les unes per necessitat (tu o la fàbrica d'ordinadors), unes altres altres com a intermediaris –que hi guanyen unes comissions– i finalment els especuladors. Les opcions permeten una transferència de risc entre qui té necessitat de prendre una decisió en un ambient d'incertesa i els que participen a la borsa per tal de guanyar diners i que estan disposats a córrer un risc.

La borsa és justa per a tothom?

Aquesta és la qüestió més interessant de totes. La borsa és justa per a la majoria perquè hi ha una minoria que intenta aprofitar el moment en què és injusta. Per exemple, una persona pot estar molt atenta al preu d'unes accions de, per exemple, l'empresa Bayer, a la borsa de Madrid i a la de Frankfurt. De tant en tant, els preus es descompensen i pot haver-hi a Frankfurt algú que vol comprar accions de Bayer a un preu més car del que es venen a Madrid. Llavors, en qüestió de minuts es podria (de fet, sempre hi ha algú que ho aprofita) comprar a Madrid i vendre a Frankfurt. Sense cap risc –llevat que algú més ràpid s'interposi en l'operació– s'haurien guanyat diners. D'aquesta operació se'n diu fer un ***arbitratge*** o guanyar-se un dinar de franc (*free lunch*).

Aquesta idea, que per a què la borsa funcioni bé cal que hi hagi uns individus dedicats a localitzar i aprofitar oportunitats d'arbitratge, és realment profunda i es dóna en moltes situacions de la vida. Als antípodes del món de les finances, al signe del *ying* i del *yan*, a la meitat blanca hi ha una taqueta negra i a la meitat negra una taqueta blanca, per a indicar que una cosa no és tota blanca o negra, bona o dolenta,... A la borsa, els arbitratgistes són la petita taca negra de la meitat blanca.