



**UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA**

**DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES  
EXPERIMENTALS**

**Papel y Lápiz y Programas de Geometría  
Dinámica en el aprendizaje de conceptos  
geométricos y su aplicación a resolución de  
problemas**

**Màster de Recerca en Didàctica de les  
Matemàtiques i de les Ciències Experimentals**

Autor

Carlos Marcelo Godoy Villanueva

Tutor

José Manuel Yabar Madinaveitia

15 de Junio 2011



**UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA**

**DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES  
EXPERIMENTALS**

**Papel y Lápiz y Programas de Geometría  
Dinámica en el aprendizaje de conceptos  
geométricos y su aplicación a resolución de  
problemas**

**Màster de Recerca en Didàctica de les  
Matemàtiques i de les Ciències Experimentals**

Autor

CARLOS MARCELO GODOY VILLANUEVA

Tutor

JOSÉ MANUEL YABAR MADINAVEITIA

15 de Junio 2011

# ÍNDICE DE CONTENIDOS

<b>Introducción</b> .....	<b>5</b>
<b>1. Planteamiento del Problema</b> .....	<b>7</b>
<b>2. Marco Teórico</b> .....	<b>9</b>
2.1 Los mediadores .....	9
2.2 Actividad instrumentada .....	10
2.3 El rol del investigador - profesor.....	11
2.3.1 El rol del profesor .....	11
2.4 Materiales manipulativos .....	12
2.5 Los ordenadores en el aula .....	13
2.5.1 Un modelo constructivista .....	13
2.5.2 El ordenador como herramienta .....	13
2.5.3 La visualización.....	14
2.6 Metacognición.....	15
2.7 Niveles de Van Hiele .....	15
<b>3. Planteamiento Metodológico y Discusión</b> .....	<b>17</b>
3.1 Aproximación metodológica.....	17
3.2 Centro educativo y participantes .....	17
3.3 Temporalización.....	18
3.4 Conocimientos previos de los alumnos .....	19
3.5 Recursos y equipamiento .....	20
3.6 Instrumento.....	21
3.6.1 Descripción .....	21
3.6.2 Objetivos didácticos.....	22
<b>4. Análisis e interpretaciones de datos y resultados</b> .....	<b>25</b>
4.1 Presentación y análisis de las actividades para la mediatriz.....	26
4.1.1 La mediatriz en el papel.....	26
4.1.2 Del papel y lápiz al uso del geogebra .....	37
4.1.3 La mediatriz en el Geogebra .....	38
4.1.4 La mediatriz en el triángulo .....	41
4.1.5 Aplicación en la resolución de problemas .....	46
4.2 Presentación y análisis de las actividades para la bisectriz .....	51
4.2.1 La bisectriz en el papel .....	52
<b>5. Conclusiones, prospectiva e implicaciones</b> .....	<b>57</b>

5.1 Conclusiones .....	57
5.1.1 En relación a los alumnos .....	57
5.1.2 En relación a la interacción de los elementos manipulativos y el uso del geogebra .....	58
5.2 Prospectiva.....	59
5.3 Implicaciones didácticas.....	59
<b>6. Bibliografía .....</b>	<b>61</b>
<b>Apéndice.....</b>	<b>64</b>
Apéndice I: Instrumento 1. La Mediatriz.....	64
Apéndice II: Instrumento 2. Práctica de autoaprendizaje Geogebra .....	67
Apéndice III: Instrumento 3. La Mediatriz en el Geogebra.....	75
Apéndice IV: Instrumento 4. La Bisectriz.....	77
Apéndice V: Instrumento 1 resuelto por alumno 1 .....	80
Apéndice VI: Instrumento 2 resuelto por alumno 1 .....	82
Apéndice VII: Transcripción entrevista Alumno 1. ....	83
Apéndice VIII: Algunas Categorías encontradas en las entrevistas. ....	86

La enseñanza de las Matemáticas y en especial de la Geometría siempre ha sido un tema de estudio e investigación, es así que constantemente ha habido diferentes aportaciones sobre los niveles de conocimientos y las fases de aprendizajes, se han realizado análisis de procesos de construcción de los conceptos geométricos, se han propuesto nuevas formas de trabajar los conceptos, existe una amplia gama de materiales que pueden favorecer al aprendizaje de la geometría, entre otros temas de investigación.

El estudio que presento se enmarca dentro de este campo de estudio y se presenta como el trabajo de investigación del “Máster de Investigación en Didácticas de las Matemáticas y las ciencias de la Universidad Autónoma de Barcelona”.

Esta investigación está ligada al análisis y estudio de lo que genéricamente podríamos llamar *capacidades geométricas*, en especial a los *procesos mentales* que evidencia el alumno al trabajar los conceptos geométricos propuestos y al aplicarlos a la resolución de problemas de geometría para alumnos de 1º de ESO.

Para la creación e implementación del diseño instructivo se ha elaborado una unidad didáctica en la que se trabaja los elementos del triángulo con lápiz y papel y software de geometría dinámica.

La estructura de la memoria del trabajo de investigación está constituida por cinco partes:

- Capítulo 1: Este capítulo me centraré en el planteamiento del problema proporcionando una visión general de los orígenes del estudio.
- Capítulo 2: Daré a conocer el marco teórico y una organización del mismo según la estructura que tendrá la definición del procesos mentales.
- Capítulo 3: Es aquí donde se presentará el diseño instructivo completo utilizado para responder la pregunta de investigación.
- Capítulo 4: Se realizará el análisis pormenorizado del resultado de las prácticas e interpretarán los resultados obtenidos.
- Capítulo 5: Se Presentará las conclusiones del trabajo y algunas líneas de investigación futura que se vislumbran de este estudio.



# 1. Planteamiento del Problema

---

Quienes nos dedicamos al interesante mundo de la enseñanza de las matemáticas tratamos con frecuencia de hacer el trabajo cotidiano menos complejo y más entretenido. En este sentido, la búsqueda de elementos que nos permitan afrontar el día a día con ciertas garantías de éxito hace que intentemos desarrollar nuevas estrategias de enseñanza y que exploremos nuevos recursos. De estas inquietudes surge la necesidad de trabajar con materiales didácticos cercanos y versátiles tales como el papel y el lápiz que proporcionan una mayor implicación del alumno en las tareas a realizar ya que la manipulación constituye un modo de dar sentido al conocimiento matemático. Y otro material didáctico que hace referencia lo anterior es el Software de Geometría Dinámica (SGD) que permite al alumno interactuar de tal manera que pueda representar de forma dinámica las propiedades geométricas asociadas a la tarea a desarrollar.

Debido a esta necesidad de buscar el éxito en el aprendizaje de los alumnos se ha planteado la siguiente pregunta de investigación:

**“¿El uso de lápiz papel y programas de geometría dinámica conjuntamente favorecen el aprendizaje de conceptos y objetivos geométricos?”**

La importancia de nuestro estudio es observar como son los procesos mentales que se desarrollan en una sesión de clase utilizando elementos manipulativos y SGD. Este estudio permitirá en un futuro elaborar propuestas didácticas y formación al profesorado.

Para abordar la pregunta de investigación se ha diseñado un conjunto de actividades adecuadas al medio utilizado, a los contenidos y a los objetivos formativos de los alumnos y se ha planteado un objetivo principal:

**OB\_:** Analizar los procesos que se dan en el aprendizaje de algunos conceptos geométricos con papel y lápiz y apoyados por escenarios computacionales y su aplicación a la resolución de problemas de figuras planas.



## 2. Marco Teórico

---

En este apartado se presenta el marco teórico esencial para el desarrollo de esta investigación en concordancia con los objetivos planteados. Para ellos se han considerado varios factores para lograr determinar cuáles son los que inciden y que efectivamente produce un cambio de aprendizaje.

Entre los factores que inciden en el aprendizaje existen varios a considerar, es así que Vygotsky establece uno de ellos como los instrumentos psicológicos que son recursos para dominar los procesos mentales. Estos instrumentos a considerar son el SGD junto con la manipulación de objetos, además existe la participación del profesor como un intermediario en el proceso de enseñanza aprendizaje.

### 2.1 Los mediadores

Para llevar a cabo la investigación es necesario tomar en cuenta a Vygotsky, quien desarrolló toda su teoría basado en la creencia de que el aprendizaje se construye de manera social.

La realización de la actividad humana en general, para Vygotsky, requiere una serie de factores intermediarios, como son los instrumentos psicológicos simbólicos y los medios de comunicación interpersonal. Vygotsky propuso que los procesos cognitivos superiores se considerarían funciones de la actividad mediada, de esta manera establece tres clases de mediadores: instrumentos materiales, instrumentos psicológicos y otros seres humanos.

La diferencia entre un instrumento psicológico y un instrumento material no radica en el instrumento en sí, sino en los procesos que en los diferentes casos se pretende controlar: "Al igual que los instrumentos materiales, los instrumentos psicológicos son formaciones artificiales. Por su naturaleza los dos son sociales. Sin embargo, mientras que los instrumentos materiales se dirigen a controlar procesos de la naturaleza, los instrumentos psicológicos dominan los **procesos cognitivos** y conductuales naturales del individuo. A diferencia de los instrumentos materiales, que sirven como conductores de la actividad humana orientada a objetos externos, los instrumentos psicológicos se orientan hacia el interior y transforman los procesos psicológicos naturales internos en funciones mentales superiores"(Kozulin, 2000; p. 29).

El uso del ordenador dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, al ser analizado en particular es explicar la participación de este como un mediador, como instrumento psicológico, en esencia la teoría de Vygotsky no considera al ordenador como instrumento debido a la época en que fue desarrollada esta teoría, a pesar de que el papel que pueda jugar se adapte a la descripción de los instrumentos psicológicos.

Seguidamente se detalla los principales argumentos que sustentan a la teoría de la Instrumentación o de la actividad instrumentada iniciada por Verillon y Rabardel (1995).

## **2.2 Actividad instrumentada**

La teoría de instrumentación es una propuesta actual neo-Vygotskyana desarrolladas por Verillon y Rabardel en la que definen dos conceptos: artefacto e instrumento.

Rabardel hace una diferencia entre artefacto (Geogebra) y el instrumento. El instrumento es la conjunción del artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para manejarlo. El proceso de transformación de un artefacto en un instrumento se llama génesis instrumental, que además involucra la construcción de esquemas personales o la apropiación de los esquemas sociales preexistentes. Esta génesis instrumental trabaja en dos direcciones: la instrumentalización y la instrumentación. La *instrumentalización* está dirigido más hacia el artefacto en sí, donde el individuo conoce las bondades del artefacto, las potencialidades y donde eventualmente puede transformar estas potencialidades hacia usos específicos. La instrumentalización es un proceso que se da desde un punto de vista externo, donde la persona aprende a utilizar el artefacto en sí mismo. Esta fase es sumamente importante, porque el nivel de logro que obtenga el sujeto en la fase de *instrumentación*, estará condicionada con el nivel de manejo desde el punto de vista operativo y funcional, que la persona haga del artefacto.

Pea (1985), menciona que desde antes de que aparecieran las computadoras, la inteligencia humana tuvo una notable extensión o desarrollo a partir del uso de instrumentos técnicos. De esta manera considera a la inteligencia no como una cualidad de la mente sola, sino como la relación entre estructuras mentales y las herramientas del intelecto que provee la cultura, así afirma que la inteligencia es distribuida. Estas herramientas del intelecto mencionadas anteriormente, las denomina Tecnologías Cognitivas. Pea (1985) afirma: "Una tecnología cognitiva la provee algún medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, tales como la memoria, en actividades de pensamiento, aprendizaje y resolución de problemas" (p.168).

Noté, que según expresa Pea en su definición de tecnología cognitiva, esta tecnología contribuye a que se desarrollen las funciones psicológicas superiores, por tanto, se puede deducir que el autor está haciendo referencia a los instrumentos o instrumentos psicológicos; esto le acredita a la tecnología cognitiva el carácter de instrumento. Pea, expone que las tecnologías cognitivas que en el pasado han tenido más importancia son la escritura y el lenguaje, pero, el ordenador, como máquina para guardar y dinamizar el uso de símbolos, reúne todas las condiciones para ser considerada como tecnología cognitiva.

## **2.3 *El rol del investigador - profesor***

El presente estudio se enmarca dentro de una situación en la que existe una dualidad de roles, por consiguiente el investigador, quien ha elaborado, diseñado, experimentado a llevado a cabo dicho estudio, es a la vez el profesor, quien tiene una vasta experiencia dedicado a la labor docente, quien también se ha desempeñado en los últimos años a realizar clases para alumnos de entre 11 a 12 años. Esto me permite decir que esta dualidad se transforma en que el profesor es el investigador, por lo tanto ahora es necesario determinar cuál es el rol del un profesor dentro de la sala de clases.

### **2.3.1 El rol del profesor**

El rol de profesor tiene una importancia significativa en el proceso de enseñanza aprendizaje. Por consiguiente este proceso se construye en el transcurso de la propia actividad matemática, dando a los alumnos un papel de participación activa y al profesor un papel de orientador permitiendo así ser un organizador y dinamizador del aprendizaje, promoviendo el trabajo en equipo, confiriendo autonomía y responsabilidad a cada uno de los integrantes. Por lo tanto el profesor adquiere un rol de mediador, la cual adquiere verdadero sentido, cuando se convierte en autentico arquitecto del aprendizaje y se sobrepone por encima de las meras explicaciones de los contenidos programáticos.

El docente propiciará en crear un clima de equidad y participación, el cual permitirá coadyudar a una relación de carácter constructiva y mutuamente realimentativa entre los alumnos favoreciendo así el aprendizaje significativo, tanto desde los elementos conceptuales como desde la experiencia de ambos (profesor-alumno). Esta dualidad fue considera por Anghileri (2006) en el cual considera que existe una mediación por parte del profesor flexible y móvil facilitando el aprendizaje de los alumnos para que sigan un

proceso de matematización vertical o horizontal<sup>1</sup> (Treffers, 1987) consiguiendo así el objetivo didáctico.

De manera general, las principales características del rol del profesor están concebidas en los siguientes aspectos:

- Ser mediador entre el alumno y el conocimiento.
- Dirigir al alumno estableciendo estrategias que faciliten la construcción de su propio conocimiento.
- Seleccionar las estrategias metodológicas que mejor se adopten a las construcciones cognitivas.
- Conducir la enseñanza.

## **2.4 Materiales manipulativos**

Se debe tener presente de donde provienen los materiales manipulativos y su propósito por el cual fueron creados. Estos provienen de la vida diaria; otros son especialmente diseñados con fines educativos, tales como los materiales didácticos, entre estos se pueden distinguir los creados con un fin específico y los que se crean con propósitos variados.

Para nuestra investigación se ha diseñado un conjunto de actividades con lápiz y papel y con el programa geogebra con un fin específico, que permitirá facilitar el aprendizaje de un concepto geométrico.

Estos elementos favorecen el aprendizaje donde los alumnos desarrollan procesos de pensamientos y de este modo pueden anticipar, combinar elementos, clasificar, relacionar y resolver problemas. Por lo tanto pueden ejercitar ciertos procesos científicos tales como el observar, interpretar modelos y experimentar.

Para resolver actividades matemáticas, en este caso de geometría, los alumnos deben observar unos objetos concretos y tener la posibilidad de manipularlos, operar sobre ellos y comprobar por sí mismos el resultados de sus acciones. Por lo tanto los alumnos podrán relacionarse con el objeto, lo conozca y luego pueda imaginar una solución para dar respuesta a las interrogantes que estos generan. Es así que desarrollaran un aprendizaje de las matemáticas más constructivo y dinámico, en donde se incentive la socialización y el desarrollo de capacidades.

---

<sup>1</sup> La matematización horizontal se refiere al proceso de "traducir" situaciones-problema desde el mundo real al matemático, contribuyendo así a comprender mejor relaciones entre lenguaje ordinario y lenguaje matemático. Por otro lado, la matematización vertical se refiere al proceso de establecer conexiones cada vez más complejas dentro de las matemáticas, con ciclos que llevan a argumentar y generalizar.

## **2.5 Los ordenadores en el aula**

Junto con el material manipulativo aparece un programa de geometría dinámica, en concreto el programa GeoGebra que es un software de código abierto que integra de forma dinámica geometría sintética y analítica y la expresión algebraica de objetos gráficos.

Una de las preguntas que se realizaba bastante era si los ordenadores ofrecen una oportunidad de estimular el proceso de aprendizaje de los alumnos. A partir de esta afirmación surgen muchas preguntas claves sobre el funcionamiento del ordenador en el contexto escolar, como por ejemplo: cuáles son sus posibles aplicaciones, en qué medida puede mejorar el contenido, en el contexto y la metodología de la enseñanza en general y de las matemáticas particulares. Nuestra intención de la investigación no es responder a aquellas inquietudes que son muy validas, pero que tienen un planteamiento amplio y de hecho muchas afirmaciones son generalizables al desarrollo de casi todos los contenidos de la enseñanza formal obligatoria. Pero nuestro caso en el presente estudio pretende analizar los procesos mentales que se dan en un entorno virtual. Permitiendo facilitar el aprendizaje de algunos conceptos geométricos, es así que para responder nuestra pregunta de investigación nos debemos centrar en tres puntos importantes que conlleva usar un ordenador en el aula, estos puntos corresponden a; un modelo constructivista; el ordenador como herramienta y la visualización.

### **2.5.1 Un modelo constructivista**

Este modelo está basado en el proceso de aprendizaje en la experiencia del alumno sobre objetos de su entorno (Vigotsky), en la utilización de materiales didácticos apropiados en actividades de laboratorio. Entendiéndose por el proceso de aprendizaje a sus propios descubrimientos, entendiéndose que el propio alumno construye y significa sus conocimientos con la ayuda pedagógica (Coll). Definiéndose ayuda pedagógica como una ayuda en dos sentidos: ayuda al alumnos, verdadero artífice del proceso aprendizaje y una ayuda que utiliza todos los medios disponibles para favorecer y orientar este proceso sin renunciar a priori a ninguno de ellos.

### **2.5.2 El ordenador como herramienta**

Es una herramienta muy conveniente para potenciar la actividad creadora del alumno. Más específicamente los recursos tecnológicos en general y los software

matemáticos en particular juegan un rol importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el trabajo de aquellos aspectos menos tratados normalmente, así como aquellos que requieren manipulación de modelos, objetos e instrumentos como, por ejemplo, los aspectos geométricos. La tecnología informática ofrece a los profesores del área matemática, la posibilidad de producir valiosos y significativos cambios, en la forma en que estos enseñan y en que los alumnos aprenden. La importancia del uso software matemático en la educación matemática, está asociada a su capacidad para proporcionar medios alternativos de expresión matemática y por su capacidad para ofrecer formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos. Aparecen nuevas formas para argumentar, apoyar ideas y la construcción de su significado matemático, la sistematización, abstracción y generalización (Moreno, 2002a). Según Moreno, “Se hace posible explorar ideas dentro de ámbitos particulares, concretos y manipulables pero que contienen la semilla de lo general, lo abstracto y lo virtual” (Moreno, 2002a).

Específicamente en la geometría este software potencia un acceso mediante la visualización que crea modelos visuales que nos permiten aproximarnos a los conceptos.

### ***2.5.3 La visualización***

En relación con esta noción de imagen Zimmermann y Cunningham (1991) en un libro de la Mathematical Association of America desarrollan el concepto de visualización, en donde la definen como el proceso de formación de imágenes, que pueden ser mentales o materiales (con papel y lápiz o con soporte tecnológico), y de utilización efectiva de dichas imágenes para la comprensión y el descubrimiento matemático.

La visualización es muy importante en el aprendizaje de las matemáticas ya que se pueden generar modelos visuales que describen una buena parte de las estructuras matemáticas subyacentes a un concepto.

Al incorporar la visualización estamos validando la construcción de un conocimiento matemático. Siendo esta validación una validación empírica (Brusseu), gracias a esto podemos favorecer un dialogo relativamente autónomo entre alumno y la situación: el primero ejerce acciones sobre la segunda y recibe información de regreso sobre efectos de sus acciones. Este dialogo favorece al alumno a detectar errores, señalar los limites de sus estrategias y propiciar su modificación o sustitución, cobrando un valor constructivo.

## 2.6 Metacognición

La metacognición se refiere al conocimiento que tiene el alumno de sus procesos cognitivos y la habilidad para controlar y manipular esos procesos generados por la retroalimentación que él recibe de sus resultados de aprendizaje. A partir de esta definición, la metacognición se compone de dos elementos esenciales: el *conocimiento* y el *control*. El *conocimiento metacognitivo* está relacionado con lo que el alumno comprende y cree acerca de un tema o una tarea y los juicios en la asignación de recursos cognitivos que esta persona hace como un resultado de ese conocimiento. El *control metacognitivo* se refiere a las aproximaciones y estrategias ideadas por un alumno para lograr metas específicas de aprendizaje y el grado por medio del cual el aprendiz organiza, monitorea y modifica estas operaciones para asegurar que el aprendizaje sea efectivo.

Las habilidades y el conocimiento metacognitivo son capacidades que sirven para mejorar el control metacognitivo, los recursos de atención, las estrategias cognitivas existentes y el conocimiento de averías en la comprensión de conceptos. Bajo estas condiciones, la metacognición es un elemento importante para una comprensión del aprendizaje en cualquier dominio, puesto que los aprendices podrían regular sus tácticas y estrategias cognitivas para construir significados de sus lecturas y experiencias dadas en ambientes computacionales.

## 2.7 Niveles de Van Hiele

Se estructura el conocimiento en diferentes niveles de razonamiento y en diferentes fases de aprendizaje. Para ello utilizaremos el modelo propuesto por Van Hiele.

Van Hiele propone cuatro niveles de razonamiento:

### **NIVEL 1: Visualización o reconocimiento**

Los alumnos perciben las figuras geométricas globalmente por su forma y no por sus propiedades.

### **NIVEL 2: Análisis**

Los alumnos son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas.

### **NIVEL 3: Ordenación o clasificación**

Los alumnos comienzan a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático, son capaces de realizar razonamientos deductivos y entienden el significado de una definición.

#### **NIVEL 4: Deducción formal**

Los alumnos pueden realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones de varios pasos ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación.

Para nuestro estudio se elaborará un diseño instructivo en donde los niveles de comprensión serán 1, 2 y 3. Estos niveles permitirán responder cuales son los procesos mentales que están asociados a la resolución de actividades incorporadas dentro de nuestro diseño instructivo aplicado en este estudio. El uso de los niveles permitirá, teniendo como base el constructivismo, verificar la adquisición de competencias básicas en el área de la geometría. Estas competencias se observarán partiendo de un trabajo manipulativo para ir afianzando el conocimiento utilizando el Geogebra y llegar a etapas de abstracción y eventualmente la generalización de los conceptos trabajados en el aula.

### **3. Planteamiento Metodológico y Discusión**

---

En este capítulo explicaremos brevemente los aspectos más relevantes de la fase preparatoria de la investigación centrándonos en dos aspectos: los organizativos y el desarrollo de las actividades preparadas:

- Los aspectos organizativos corresponderían a la institución donde se llevo a cabo el estudio, temporización para su ejecución, el nivel de conocimientos previos de los alumnos y los recursos y equipamientos que tiene este centro.
- El segundo aspecto tiene relación con las actividades diseñada, dando a conocer la descripción y los objetivos planteados para que los alumnos logren los aprendizajes esperados.

#### **3.1 Aproximación metodológica**

Esta investigación es de tipo cualitativo-interpretativo ya que queremos buscar un fenómeno educativo presente al momento de desarrollar actividades tanto utilizando papel y lápiz como el uso de un Software de Geometría Dinámica. Considerando que la investigación cualitativa se centra en el análisis detallado de lo que hacen unos pocos sujetos en entorno a sus propios aprendizaje.

A partir del desarrollo de las actividades que se programa para las sesiones en esta fase de implementación se generará y registrará toda una serie de información:

1. Respuestas escritas de los alumnos.
2. Ficheros de Geogebra de las actividades.
3. Observaciones, comentarios y primer análisis después de haber revisado las respuestas escritas y los ficheros de los alumnos.
4. Grabaciones de los alumnos al momento del desarrollo de las actividades.
5. Entrevista a los alumnos participantes del estudio.

#### **3.2 Centro educativo y participantes**

La fase experimental se ha llevado a cabo en el Instituto de Educación Secundaria Jaume Mimo de Cerdanyola del Vallès, Barcelona. El instituto tiene dos líneas; 1º y 2º Ciclo de Eso, Bachillerato y Ciclos Formativos. Para nuestro estudio se ha escogido a

una clase de 1° de ESO que está conformado por 21 alumnos de entre 12 y 13 años de edad. Esta clase está dirigida por la profesora Nieves Ibañez, quien presentó una excelente disposición y permitir que sea su clase la elegida para ser estudiada.

Tal como se expresó en el punto 3.1, se ha diseñado un conjunto de actividades que permitirá organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje para los alumnos de esta clase. De esta forma los alumnos aprenderán de forma significativa los conceptos que ahí se presentan.

Todos los alumnos realizarán el conjunto de actividades preparadas y responderán a las preguntas que aparecen en el material escrito, respuestas que servirán como material de estudio de la investigación.

Para este estudio además se han seleccionado 6 alumnos que trabajarán en pareja, Javi-Eric, Adriana-Guillermo y Tania-Oscar. Se han seleccionado a estos alumnos debido a que en su mayoría son de buen rendimiento y además de ser actores participativos en el aula de clases. Para la selección de parejas se ha considerado los niveles de participación y calidad expresiva y que además tuviesen niveles académicos similares. Si bien es cierto que la clase son informantes de la investigación, este grupo de 3 parejas los consideraremos como principales informantes de la investigación. Como tales informantes especiales se les grabará su actuación en las clases y se les realizarán entrevistas personalizadas.

Luego de mi presentación por parte de la profesora a la clase, procedo a explicar en qué consistía mi presencia en su sala de clases. En la cual se les comento que se desarrollaría una investigación sobre un tema de geometría, y que algunos alumnos serían grabados durante las sesiones pidiendo su colaboración que estas grabaciones.

Como los alumnos serían grabados se elaboró un documento que permitiera el consentimiento de sus padres y que además estuvieran al tanto de dicho estudio.

### **3.3 Temporalización**

En esta investigación la hemos programado para incorporarse al currículo, atendiendo a las exigencias de objetivos, contenidos y de tiempo, que establece el desarrollo de la programación didáctica. Los contenidos seleccionados han sido programados para el tercer trimestre del curso 2008-2009, en un tiempo que abarca 5 semanas, trabajando una vez por semana. Para su concreción se han establecido tres fases:

- La primera fase ha consistido en diseñar un conjunto de actividades que conformaron una unidad didáctica que fue llevada a cabo en 5 sesiones en el aula de informática, en la que cada una de ellas planteaba objetivos didácticos contemplados en las bases curriculares de 1º de ESO, además se aportan un conjunto de ficheros para ser utilizados en el Geogebra.
- La segunda fase se desarrollarán las 5 sesiones prácticas de la unidad didáctica en la que se les presentaron las actividades de papel y lápiz y los ficheros que luego utilizaron con el Geogebra.
- La tercera fase consistirá en una entrevista con 3 alumnos involucrados en la investigación, en esta entrevista se hacen alcances a los objetivos planteados en la unidad didáctica. Esta fase nos permitirá verificar que instrumentos (papel-lápiz y SGD) han permitido generar aprendizaje en los alumnos.

### 3.4 Conocimientos previos de los alumnos

Las bases curriculares de la educación secundaria establece que uno de los objetivos es desarrollar la capacidad de identificar las formas y relaciones geométricas espaciales presentes en la vida cotidiana, y utilizar la visualización, el razonamiento y la modelización geométrica para descubrir y probar propiedades geométricas además de resolver problemas (Educació, currículum, educació secundària obligatòria, 2008). Y como contenido específico es explorar figuras geométricas y analizar sus características mediante geoplanos, papeles pautados y programas informáticos dinámicos. Teniendo claro los objetivos y contenidos para este nivel, junto a la profesora guía del grupo investigado se establecieron los conocimientos previos que tenían los alumnos sobre la materia de geometría, es por eso que un dato importante fue la entrega por la profesora a cargo de este grupo de clase, reconociendo los niveles de conocimientos de los alumnos, es así que determinó los contenidos que poseían. Entre los cuales con mayor importancia para nosotros fue si ellos poseían el concepto de *punto*, *línea*, *recta*, *segmento*, *rayo*, *triángulo*, *ángulo*, que nos permitió diseñar la unidad didáctica pertinente para nuestro estudio.

En relación a los conceptos estudiados, los alumnos ya poseían un conocimiento mínimo de mediatriz y bisectriz sin haber existido una profundización en sesiones anteriores. Esto queda determinado al momento de conversar con la profesora titular sobre los contenidos asociados a nuestros conceptos estudiados.

### 3.5 Recursos y equipamiento

Uno de los aspectos fundamentales en el uso de las TIC en el entorno del aprendizaje en el que se lleva a cabo la innovación y la investigación, es ver y comentar qué espacios y recursos tecnológicos cuenta el centro, adecuados para el trabajo que se plantea, y como están organizados.

El Instituto cuenta con dos salas de informática con un total de nueve ordenadores cada una. Se optó por una de ellas por su distribución para el desarrollo de las sesiones tal como lo muestran la figura 1. Esta aula fue escogida debido a sus características en la cual los alumnos siempre están observando al profesor que da las explicaciones en la parte delantera del aula, junto frente al telón de proyección. Esta aula puede acoger a un grupo de veintidós alumnos sentados en parejas, cada pareja con un ordenador. Las instalaciones cuentan con un mobiliario y ordenadores antiguos, pero por otro lado el sistema de red local está muy bien diseñado y funciona muy bien. Destacar que ambas aulas cuentan con un proyector conectado al ordenador del profesor.

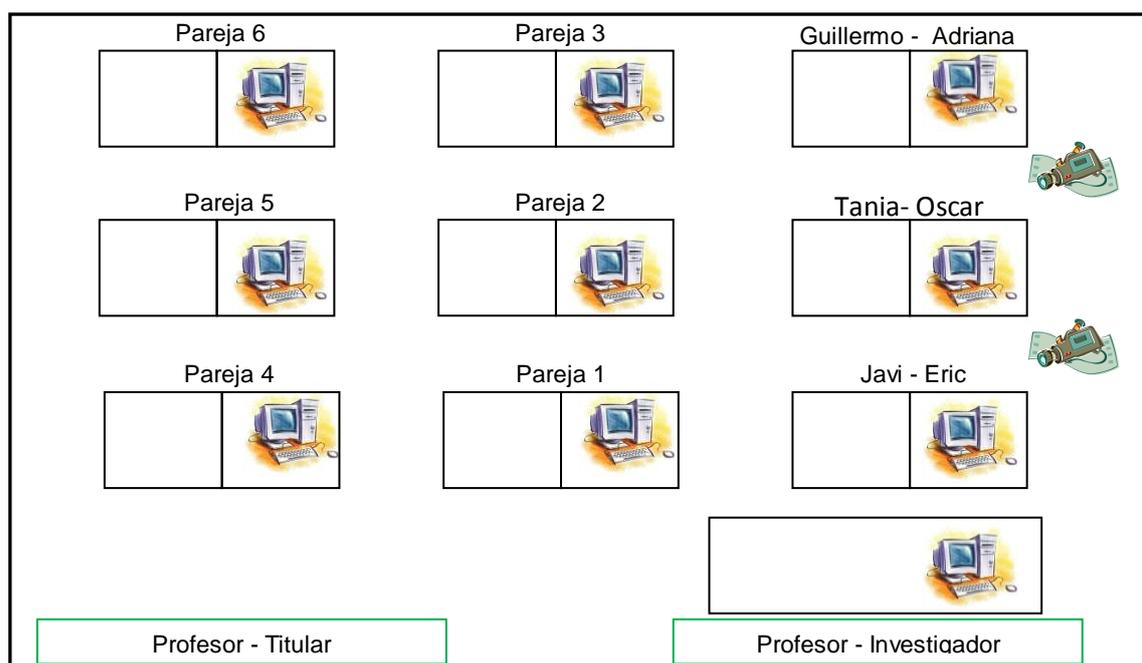


Figura 1. Distribución aula de informática de la recogida de datos.

Señalar que los ordenadores cuentan con sistema operativo llamado Linux, lo que hace que los alumnos tarden un poco más en ejecutar acciones. Como los ordenadores están conectados a la red interna de comunicación y tienen acceso a internet, todo ello con las medidas de control habituales para evitar alteraciones en la configuración, descargas inadecuadas, etc, por tanto todo el personal docente y alumnado cuenta con un nombre de usuario y contraseña individual, permitiendo enviar archivos, dar

respuestas y, en general hacer circular todo tipo de información útil para la enseñanza y el aprendizaje.

## 3.6 Instrumento

### 3.6.1 Descripción

Para realizar esta experiencia se ha diseñado una unidad didáctica que se presenta en el anexo, y que será la guía de los alumnos en su proceso de Enseñanza-Aprendizaje que nos permitirá recopilar datos sobre el tema “Elementos de un Triángulo”. La unidad didáctica será aplicada en 5 sesiones de una hora lectiva cada una en el aula de informática. Cada sesión tiene un conjunto de actividades que apuntan a resolver algunas inquietudes que están presente en nuestro objetivo de la investigación. Las sesiones están repartidas de la siguiente manera:

<b>Estructura esquemática de la Unidad Didáctica</b>		
<b>Día</b>	<b>Lugar</b>	<b>Título</b>
1.	Aula informática	Introducción – actividad sesión 1.
2.	Aula informática	Fin actividad sesión 1.
		Inicio actividad sesión 2. (guía de autoaprendizaje)
3.	Aula informática	Actividad sesión 2.
4.	Aula informática	Actividad sesión 3.
5.	Aula informática	Actividad sesión 3.

El primer día se desarrolló las actividades que hacen referencia al concepto de *mediatriz*, en la cual los alumnos manipularon elementos tales como fichas y cuerdas sin apoyo tecnológico. El investigador es a la vez profesor que dirige la clase. Al momento del desarrollo de las actividades los alumnos son asistidos por el profesor-investigador y la profesora titular al momento de existir alguna duda. Para este día los alumnos no acabaron con toda la experiencia por que debió quedar para el día siguiente. El segundo día los alumnos concluyeron con las actividades planteadas, luego de los alumnos hicieron uso del ordenador en la cual se utilizo el Geogebra, desarrollando una guía de autoaprendizaje permitiendo a los alumnos controlar de manera básica y simple algunas herramientas del software.

Los posteriores días los alumnos desarrollaron las actividades con un entorno tecnológico (Geogebra), en la cual los alumnos fueron guiados por el profesor-investigador permitiendo de esta manera lograr uno de los objetivos planteados con respecto al aprendizaje de los alumnos.

Las actividades elegidas para ser incorporadas la experiencia educativa fueron creadas para obtener el mayor potencial por parte de los alumnos, y a la vez obtener datos para resolver la cuestión de nuestro estudio. Destacando que los problemas incorporados están contextualizados logrando generar un ambiente de discusión académica.

### **3.6.2 Objetivos didácticos**

Consideramos que los trazos, manipulaciones físicas y uso de SGD, además de constituir un objeto geométrico en sí mismos, son un medio para indagar propiedades de figuras y hacer conjeturas, así como también constituir un importante recurso para fomentar la argumentación.

El uso de material manipulable es un elemento importante a la hora de que los alumnos aprendan. Para que el material manipulativo juega un papel destacado en el aprendizaje de los alumnos se debe tener en cuenta que debe cumplir con una serie de finalidades tales como la aproximación del alumnos a la realidad, ofreciendo una noción más exacta de los hechos estudiados; facilitar la percepción y la comprensión de los hechos y de los conceptos; contribuir a la fijación del aprendizaje a través de la impresión más viva y sugestiva que puede provocar el material; y por ultimo dar la oportunidad de que se manifiesten las aptitudes y el desarrollo de habilidades específicas.

Por otro lado tenemos SGD en la que se tendrá la posibilidad de aprovecha la visualización dinámica e interactiva para profundizar, mejorar la observación y analizar los conceptos y relaciones matemáticas, de esta manera el SGD se transforma en un instrumento de aprendizaje autónomo. Esto permitirá al alumno ser capaz de construir esquemas de conocimiento partiendo de sus conocimientos previos que lo llevan a descubrir o modificar ideas.

Por lo tanto los objetivos planteados para esta unidad didáctica están determinados de la siguiente manera:

- Potenciar la capacidad visual y la constructiva a través de elementos manipulables. (doblado de papel)
- Realizar construcciones geométricas de figuras y experimentar con las mismas.
- Encontrar estrategias que permitan hacer los trazos o construcciones requeridas.
- Resolver las prácticas que se proponen a lo largo de la sesión de trabajo a fin de experimentar el funcionamiento de algunas herramientas y opciones del programa.
- Conocer los lugares geométricos básicos.

- Explorar las nuevas tecnologías como apoyo en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.
- Conocer una herramienta interactiva para el desarrollo del contenido de Matemáticas relativo a la geometría del triángulo.



## 4. Análisis e interpretaciones de datos y resultados

---

### Introducción

De acuerdo con la metodología establecida en el capítulo 3 y con el instrumento establecido en el marco teórico se procede a un análisis e interpretación de los datos recogidos. Además determinar cuáles son los procesos mentales que se desarrollan cuando un grupo de alumnos resuelven actividades en un entorno manual e interactivo de la geometría que se ha diseñado intentando que los alumnos adquieran una serie de conocimientos, destrezas y habilidades de tipo geométrico.

En lo que sigue en adelante mostraremos como se puede formar el concepto sobre un objeto matemático: el lugar geométrico llamado mediatriz de un segmento. Antes debemos aclarar que cuando se habla del concepto sobre un objeto matemático, hacemos referencia a la imagen mental que nos formamos acerca de dicho objeto, esta imagen mental debe reflejar los rasgos internos o esenciales que son comunes a mediatrices y bisectrices; así mismo, la definición del concepto se construye enlistando los rasgos sustanciales del objeto que define.

Es así que según Jungk 1985, en la enseñanza de las matemáticas el tratamiento de conceptos puede realizarse de dos modos, el primero, parte de la definición del concepto para tratar de formar la imagen mental del objeto; y el segundo, es el proceso de formación del concepto, que consiste en una serie de actividades por medio de las cuales se busca formar la imagen mental del objeto, para culminar con la elaboración de la propia definición del concepto. Para nuestro estudio se seguirá el segundo modo.

Las sesiones de trabajo fueron llevadas a cabo en el aula trabajando por parejas y con una muy buena predisposición a las actividades a llevar a cabo. Estas actividades han sido presentadas en el capítulo 3. El ambiente de la clase era muy bueno y se generaron unos espacios de trabajo que promovieron la interacción y la discusión matemática deseada.

## 4.1 Presentación y análisis de las actividades para la mediatriz

En este apartado, se muestra el proceso de análisis de la unidad didáctica correspondiente al concepto de mediatriz de un segmento, la mediatriz en un triángulo y finalmente el circuncentro, que se trabajó en tres sesiones. Para ello se ha elaborado un análisis descriptivo de lo descrito por los alumnos en las sesiones de trabajo complementando el análisis con una entrevista realizada a los alumnos estudiados. Para ellos los intervinientes en la entrevista son dos personas: el profesor-investigador (PP) y el alumno (AA).

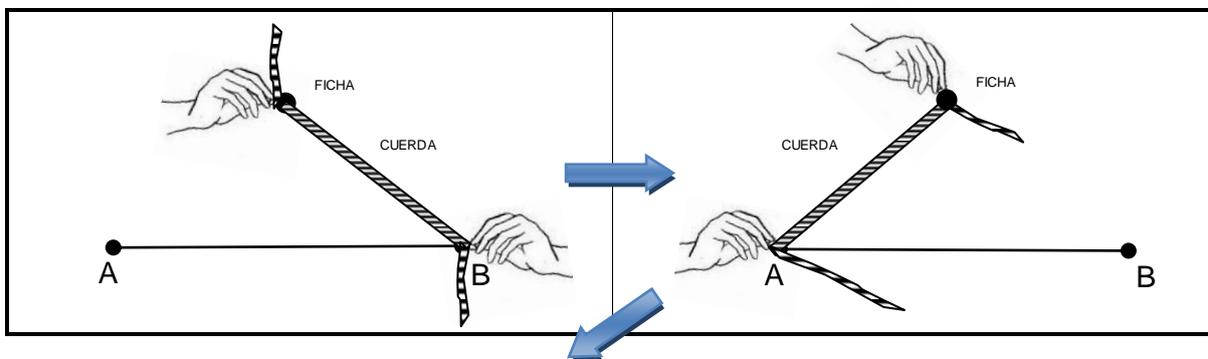
### 4.1.1 La mediatriz en el papel

**ACTIVIDAD 1:** Tenemos una hoja con dos puntos A y B, una cuerda y un conjunto de fichas. Coloca la ficha de tal manera que las distancias de esta a los puntos sea la misma (equidistancia de los puntos). Haz lo mismo con las siguientes fichas.

1. ¿Qué particularidad ves en este conjunto de fichas al observar cómo están colocadas?
2. ¿Qué sucede si pones la cuerda sobre las fichas entre la primera y la última?
  - a) ¿Podrías decir que las fichas están alineadas? ¿Por qué?
  - b) ¿Si queremos agregar más fichas sin medir (sin cuerda) que cumplan esta condición donde la pondrías?

#### Actividad n° 1. Primera Sesión.

Como primera actividad se han incorporado estas preguntas según lo que se quiere conseguir para la experimentación, que es lograr que los alumnos tuviesen una aproximación visual inicial del concepto de mediatriz sin nombrarla. Los alumnos colocan unas fichas que equidistan de los extremos del segmento y observan que están alineadas. Más adelante podrán relacionar estas fichas que están alineadas con la mediatriz.



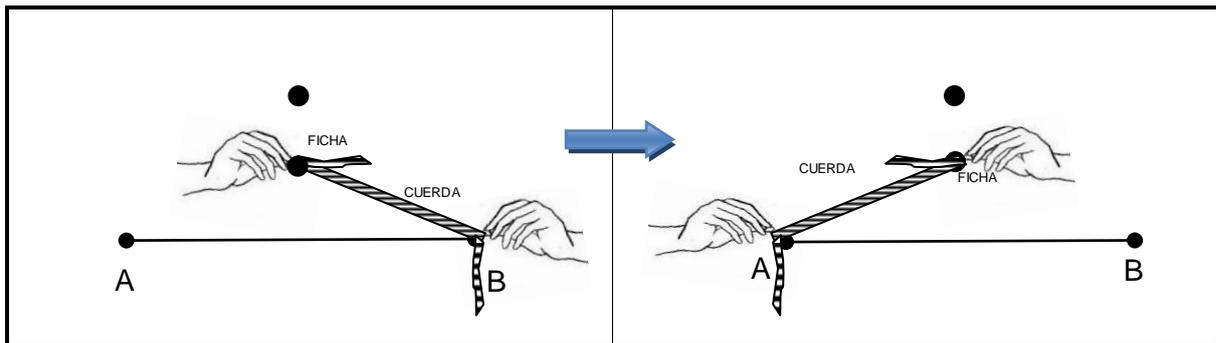


Figura 1. Procedimiento Actividad 1

Lo observado por el profesor-investigador al momento de realizar la experiencia es que los alumnos demuestran un entusiasmo por realizar la actividad, pero al momento de su ejecución se enfrentan a dificultades para lograr ubicar la ficha de tal manera que exista una misma distancia desde los extremos a la ficha, la mayoría aplica el método de ensayo error ya que los alumnos toman una medida de la cuerda desde el extremo A y luego otra medida para el extremo B, de esta forma la ficha queda ubicada en un punto que no equidista de los extremos del segmento. Lo antes mencionado se da hasta que el profesor da varias explicaciones al grupo curso, además de acercarse para observar y dar indicios de cómo lograr terminar la primera experiencia. Por consiguiente los alumnos logran ubicar sin mayor problema la primera ficha. Desde luego como ya hubo un proceso de aprendizaje los alumnos siguen agregando más fichas y así lograr tener un conjunto de fichas ordenadas.

<b>RESPUESTAS ACTIVIDAD 1 PREGUNTA 1</b>	
<b>ALUMNO</b>	<b>¿Qué particularidad ves en este conjunto de fichas al observar cómo están colocadas?</b>
JAVI	Que están a la misma distancia del punto a y del punto b y a la vez están a la misma distancia entre ellas.
OSCAR	Que el punto que he colocado esta en medio siempre.
ADRIANA	Que hay la misma distancia entre la ficha y el punto a y el b y entre la otra ficha.
GUILLERMO	Que forma una línea.
YAIZA	Que hay la misma distancia entre las fichas y los puntos a y b y que siempre las fichas estarán una arriba de la otra.

Tabla 1. Respuestas dadas por los alumnos a la primera pregunta.

Si observamos las respuestas plasmadas por los alumnos en la guía de trabajo se observa que en su mayoría logran visualizar una misma distancia de las fichas a los puntos A y B. Es así que destacamos un elemento importante en este proceso que son las respuestas con conceptos que los alumnos tienen como conocimientos previos. Estos conceptos son “*misma distancia, medio y línea*” que ayuda a concluir que los alumnos utilizando diferentes elementos para determinar que las fichas se encuentran alineadas, es más, ellos creen responder a las respuestas con todos sus conocimientos con respecto a conceptos geométricos, sin a lo mejor tener un lenguaje formal para redactar

una respuesta. Como se demuestra en la respuesta de Oscar y Guillermo (**Tabla 1**) en ella indican que las fichas están ubicadas de tal manera que quedan en “*medio siempre*” interpretándose que el término “*medio*” es utilizado para determinar que las fichas están ubicadas en una línea que intersecta al segmento . A su vez de forma particular lo demuestra Guillermo afirmando que las fichas quedan ubicadas de tal forma que determina una línea. Lo antes mencionado es muy importante porque demuestra que el alumno si logró manipular la cuerda utilizando la misma medida cada vez que necesitó ubicar la ficha en esa línea que él menciona.

Por otro lado tenemos la respuesta de Javi, Adriana y Yaiza (**Tabla 1**) que son los que respondieron utilizando la frase “*misma distancia*” entre los extremos y las fichas, por lo tanto ellos crearon una imagen mental del lugar geométrico de la mediatriz, esto es que las distancias desde los extremos del segmento a cualesquiera ficha ubicada tiene una misma distancia. Vemos que el alumno ya ha generado una estructura muy básica preliminar del concepto que aun no ha sido nombrado. A tendiendo a lo anterior podemos deducir que al alumno presentándole estímulos provocados se logra llamar su atención, por lo tanto, tiene una alerta mental y por ende tiene una predisposición que permite centrar a los alumnos en la actividad inicial.

<b>RESPUESTAS ACTIVIDAD 1 PREGUNTA 2</b>	
<b>ALUMNO</b>	<b>¿Qué sucede si pones la cuerda sobre las fichas entre la primera y la última?</b>
JAVI	Se forma una línea.
OSCAR	Sale una línea
ADRIANA	Sucedo que sale una línea recta.
GUILLERMO	Sale una línea.
YAIZA	Que se quedan todas en la cuerda.
TANIA	Que sale una línea recta.

**Tabla 2. Respuestas dadas por los alumnos a la segunda pregunta.**

Haciendo referencia a la segunda pregunta (**Tabla 2**) queda demostrado que los alumnos utilizando la cuerda lograron determinar que existe una línea desde la primera y la ultima ficha, tal como responde Adriana que dice: “*sucedo que sale una línea recta*”.

Por lo tanto si consideramos las afirmaciones hechas para la primera pregunta sumada al hecho de que afirman que existe una línea, podemos decir que han realizado una aproximación visual hacia el concepto que estamos trabajando sin nombrarlo.

<b>RESPUESTAS ACTIVIDAD 1 PREGUNTA 2 LETRA B</b>	
<b>ALUMNOS</b>	<i>¿Si queremos agregar más fichas sin medir (sin cuerda) que cumplan esta condición donde la pondrías? ¿Por qué?</i>
JAVI	<i>Justo en medio de a y b. Es el sitio más fácil y así continuando por debajo.</i>
OSCAR	<i>Rectas.</i>
ADRIANA	<i>La pondría justo detrás de la primera y la última ficha y así conservaría las distancias.</i>
GUILLERMO	<i>En la línea recta. Siempre tendrán la misma distancia.</i>
YAIZA	<i>Debajo o encima.</i>
TANIA	<i>En línea recta, porque más o menos miden igual.</i>

**Tabla 2. Respuestas dadas por los alumnos a la segunda pregunta letra B.**

Por otro lado podemos observar las respuestas de los alumnos a la segunda pregunta letra “b” (**Tabla 3**) demuestran que no logran determinar la ubicación precisa del lugar en donde ubicarían una nueva ficha sin utilizar la cuerda. Tal como lo explica Javi diciendo: “*justo en medio de A y B. Es el sitio más fácil y así continuado por debajo*”, o por ejemplo tenemos la respuesta de Adriana que dice “*la pondría justo detrás de la primera y la última ficha y así conservaría las distancias*”. Estas respuestas son justificadas utilizando un lenguaje básico, pero que utilizan elementos que ya tienen preconcebidos como por ejemplo lo que dice Adriana “*y así conservaría las distancia*”. Al analizar esta respuesta el alumno utiliza de forma muy simple la propiedad en la que establecen la existencia de una misma distancia de los puntos que se encuentran en la mediatriz a los extremos del segmento *AB*.

<b>ENTREVISTA ALUMNO 1</b>	
PP	<i>Cuando trabajamos con la mediatriz, y utilizamos las cuerdas, con las fichas, se te vino inmediatamente alguna idea de cómo era la mediatriz.</i>
AA	<i>No, directamente no.</i>
PP	<i>Que paso, que tuviste que hacer para que pudieses entender, si es que llegaste a entender el concepto de mediatriz.</i>
AA	<i>Cuando lo hice con las fichas.</i>
PP	<i>¿Cuándo lo hiciste con las fichas, que hiciste con las fichas?</i>
AA	<i>Pues hacer un triangulo y juntar la cuerda con las tres fichas.</i>

**Tabla 4. Fragmento entrevista realizada al Alumno 1.**

Si observamos un fragmento de la entrevista realizada (**Tabla 4**) podemos decir que para él no fue muy significativo el uso del material manipulativo, pero a su vez demuestra que para entender el concepto fue necesario el trabajo con las fichas. Además destacar que su mente lo llevo a construir un triangulo; “*Pues hacer un triangulo y juntar la cuerda con las tres fichas*”, esto es fundamental para que el alumno genere su propia definición del concepto, ya que esto es la base para poder conjeturar la propiedad de equidistancia entre los extremos del segmento y un punto ubicado en la mediatriz.

<b>ENTREVISTA ALUMNO 1</b>	
PP	<i>: Cuando trabajas con el material manipulable lo que son las fichas, las cuerdas, bueno la reglas todo ese tipo de material. ¿Cómo te sentiste ahí?</i>
AA	<i>: mmmm no sé, me costó hacerlo.</i>
PP	<i>: ¿y lo de las fichas?</i>
AA	<i>: si</i>

PP	: ¿Eso fue lo más complicado?
AA	: Si más complicado, pero aparte de una actividad con fichas y con piezas de manipular, pues también agrada a los alumnos.
PP	: ¿Y a tí?
AA	: A mí también.
PP	: Pero ¿te costo en un principio lograr entender el concepto de cómo era la idea?
AA	: Si.

**Tabla 5. Entrevista alumno 3 en relación al uso de las fichas y cuerdas.**

Al observar la entrevista realizada al Alumno 3 (**Tabla 5**) se pudo constatar que para él existió cierta dificultad al momento de utilizar las fichas y cuerdas, no obstante, este alumno tardó un poco más que el resto en comprender como se utilizaban las fichas y cuerdas pero finalmente logró generar una estructura simple del concepto. A la vez este alumno considera que ese tipo de elementos son muy agradables de trabajar en clases.

Por lo tanto las actividades realizadas por los alumnos generó un equilibrio entre las ideas previas y la nueva experiencia, generándose el aprendizaje mediante la organización y la adaptación entre las ideas previas y las nuevas experiencias.

Siguiendo con el análisis les presento la segunda actividad que permite observar como los alumnos pueden irse aproximando el concepto de mediatriz mediante la manipulación del doblado de papel.

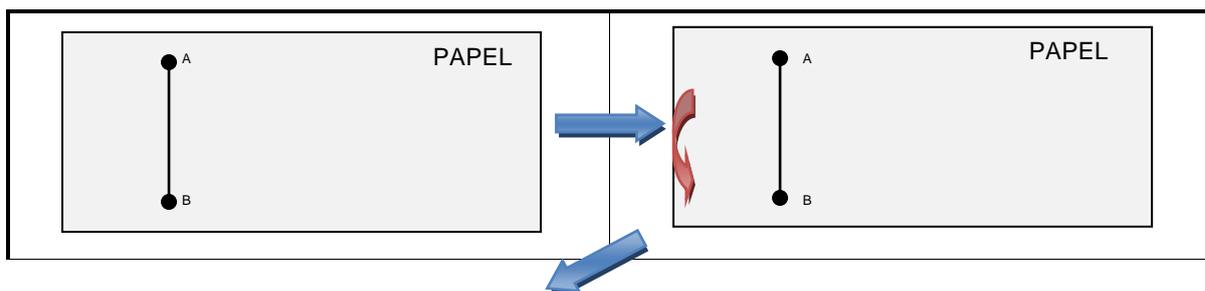
**ACTIVIDAD 2:** En un papel marca dos puntos A y B y el segmento que los une AB. Luego coge el papel y dóblalo colocando el punto A sobre el B marcando la línea. Comprueba con la cuerda las distancias entre los puntos A y B y uno o dos puntos de la línea.

1. ¿Qué características tienen los puntos de esta línea con respecto a los puntos A y B?
2. ¿Puedes asociar la actividad 1 con la actividad 2?

**Actividad n° 2 - Primera Sesión -**

Esta actividad tiene como característica el uso del papel en la que se le aplicara cierto doblado y así el alumno podría conjeturar que características tiene la línea que se forma.

Por las observaciones hechas en esta sesión, esta fue una experiencia bastante entretenida y enriquecedora para los alumnos, ya que el hecho de manipular un elemento tan simple como un papel proporciona una mayor implicación del alumno a la tarea y esto constituye un modo de dar sentido al conocimiento matemático.



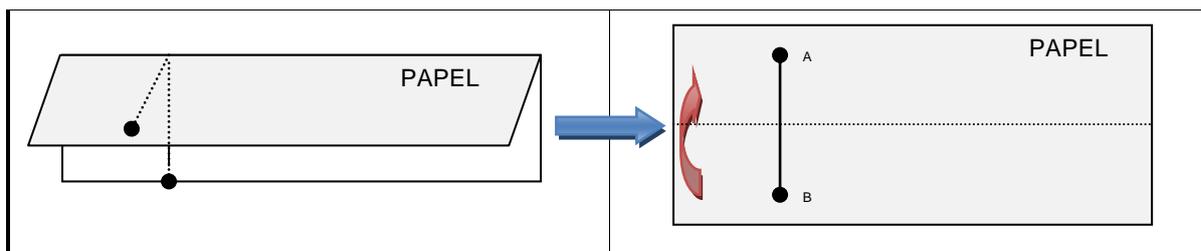


Figura 2. Procedimiento Actividad 2.

Se pretende profundizar la aproximación al concepto de mediatriz generando una relación biunívoca entre la recta y el dobléz, como se muestra en la **Figura 2**, de tal manera que el alumno pueda comprobar que solo existe un dobléz, que equivale a decir que existe una única recta que intersecta perpendicularmente al segmento  $AB$ , además de comprobar que la equidistancias de un punto cualquiera ubicado en la recta a los extremos del segmento son iguales.

<b>RESPUESTAS ACTIVIDAD 2 PREGUNTA 1</b>	
<b>ALUMNO</b>	<b>¿Qué características tienen los puntos de esta línea con respecto a los puntos A y B?</b>
Javi	Que señalan la mediatriz.
Oscar	Que sale una línea que es la mediatriz. Que si ponemos un punto en la línea perpendicular todos tendrán las mismas medidas.
Adriana	En cualquier punto de la línea sería la mediatriz.
Guillermo	Que están en línea. Siempre serán las mismas distancias en cualquier punto de la línea.
Yaiza	Que tienen la misma distancia.
Tania	Que aparece una línea que nace la mediatriz entre b y la a.

Tabla 6. Respuestas dadas por los alumnos a la primera pregunta.

Estas respuestas son las primeras en que los alumnos ya reconocieron el concepto que se estaba trabajando sin haberlo nombrado, en este caso la mediatriz, como podemos apreciar en la **Tabla 6**, tres alumnos saben cuál es el concepto, por consiguiente podemos concluir que estos alumnos tienen medianamente internalizado el concepto de mediatriz. Pero también podemos asegurar que existen otros tres alumnos que no tienen muy claro que se está haciendo, como por ejemplo Adriana que solo se limita a decir que los puntos sobre esa línea están sobre la mediatriz, por tanto nos dice que ella sabe por conocimiento previo que esa línea se llama mediatriz.

Por otro lado si observamos la respuesta de Guillermo (**Tabla 6**) él expresa de una manera muy simple que tiene claro la equidistancia de los puntos de la recta a los extremos del segmento, esto nos indica que este alumno sabe utilizar la cuerda para medir y determinar igualdad de distancias, para cualquier punto sobre el dobléz. También es destacable lo que responde Oscar indicando algo que ningún otro alumno había concluido que la recta formada por el dobléz es perpendicular al segmento  $AB$ . Además agrega que los puntos ubicados sobre la recta determinan distancia iguales a los extremos del segmento  $AB$ . Al leer detenidamente su respuesta se confirma que Oscar

tiene una concepción ya definida de la mediatriz, encontrándose en el nivel análisis (nivel de Van Hiele), mostrando un notable avance en su proceso de aprendizaje.

Actividad 2 pregunta 2 permite relacionar las actividades ya desarrolladas, para ello podemos observar en la Tabla 7 que existen tres alumnos que pueden relacionar dichas actividades, en este caso los alumnos son Javi, Adriana y Guillermo.

<b>RESPUESTAS ACTIVIDAD 2 PREGUNTA 2</b>	
<b>ALUMNO</b>	<b>¿Puedes asociar la actividad 1 con la actividad 2?</b>
Javi	<i>Si, en el punto A y el punto B están a la misma distancia de la línea.</i>
Oscar	<i>Si, por que parte en dos un segmento.</i>
Adriana	<i>Si, por que en los dos sitios encontramos una línea que es la mitad, mediatriz.</i>
Guillermo	<i>Sí, que sean dos líneas, que tengan las mismas distancias.</i>
Yaiza	<i>Si</i>
Tania	<i>Si por que en los 2 ejercicios hay que borrar el punto medio.</i>

**Tabla 7. Respuestas dadas por los alumnos a la primera pregunta.**

Las respuestas a esta pregunta son bastante diferentes entre los alumnos, pero se puede destacar la respuesta de Javi y Guillermo (**Tabla 7**) en la que podemos interpretar que las distancias de la línea a los extremos del segmento son iguales. Estas respuestas confirman que el alumno logro relacionar ambas actividades ya que si recordamos lo que Javi respondió en la actividad 1 primera pregunta (**Tabla 1**) nos dice que las distancias a los extremos del segmento son iguales, por lo tanto concuerdan las respuestas debido a que en ambos casos lo que se quería era justamente eso, que el alumno lograra determinar que las distancias a los extremos del segmento a la línea son iguales.

Por otro lado si se observamos las respuestas de los demás alumnos podemos determinar que no existe ninguna relación entre ambas actividades, pero si podemos hacer referencia al argumento que da en su respuesta Oscar (**Tabla 7**), en la cual él nos da a conocer que la línea que se forma parte en dos al segmento *AB*, que si bien es cierto no es una respuesta que relacione ambas actividades pero si es una respuesta que nos dice que este alumno a sabido proceder correctamente la actividad del doblez.

La mayoría de las respuestas de los alumnos tienen como argumento la idea de la equidistancia de los extremos del segmento, pero esta concepción para esta definición es deficitaria o incompleta, porque en ella no están enlistados todos los rasgos esenciales comunes a toda las mediatrices, falta que hubiesen agregado uno que es muy importante que es el hecho de que la mediatriz es perpendicular al segmento *AB*.

Finalmente les presento la actividad tres, esta actividad propone generar una definición del concepto de mediatriz por parte de los alumnos, para esto los alumnos ya tienen una estructura mental clara del concepto de mediatriz debido a lo realizado en

secuencia anterior e inclusive algunos respondieron en sus respuestas anteriores haciendo alusión a la mediatriz.

**ACTIVIDAD 3:** Hemos dibujado dos puntos y el segmento que los une, si hemos doblamos la hoja de manera que los puntos A y B coincidan, vemos que queda marcada una recta que llamamos mediatriz del segmento AB. ¿Cómo puedes explicar que es la mediatriz de un segmento AB?

**Actividad n° 3 - Primera Sesión -**

La actividad es considerada una parte fundamental en el aprendizaje del concepto para los alumnos, ya que por primera vez en la sesión el profesor les informa sobre el concepto que están trabajando. Recordemos que esta secuencia de actividades tiene un orden en la que los alumnos primero experimentaron y luego concluyeron, es decir, partiendo por actividades procedimentales para luego llegar a concluir la definición del concepto de la mediatriz.

<b>RESPUESTAS A LA PREGUNTA ACTIVIDAD 3</b>	
JAVI	<i>El segmento que une el punto A, B por el medio.</i>
OSCAR	<i>Es una línea que parte el segmento en dos.</i>
ADRIANA	<i>Es la recta que pasa por el centro del segmento que une los puntos a y b.</i>
GUILLERMO	<i>El trozo que al unir el punto a y b forma una línea.</i>
TANIA	<i>Porque es la mitad.</i>

**Tabla 8. Respuestas dadas por los alumnos a la actividad 3.**

Es así que una de las características que tienen los alumnos que han participado del estudio, es que la mayoría posee una forma muy simple de redactar sus respuestas, ya antes mencionado, debido a su lenguaje básico y poco formal. En esta actividad los alumnos podrían haberse explayado mucho más de lo que han redactado, por ejemplo tenemos a Tania (**Tabla 8**) que simplemente justifica su respuesta diciendo que es la “mitad”, si bien es cierto algo de razón tiene, pero la pregunta estaba enfocada a dar una definición lo cual no lo hizo. No obstante, tenemos a Adriana (**Tabla 8**), ella muestra una clara intención de redactar una definición que resulta muy cercana a lo que es la definición de mediatriz. Pero le faltó relacionar el ángulo que se forma entre el segmento y la mediatriz, que son perpendiculares. Esto podría haber sido fundamental para que Adriana estuviese en un nivel superior de aproximación al conocimiento.

Para esta actividad se han presentado respuestas extremas hablando de expresar una definición, pero se debe destacar que en su mayoría los alumnos tienen una idea estructural más o menos clara de la mediatriz. Unas de las deficiencias que se presentan en las últimas respuestas dadas por los alumnos es que ninguno de ellos mencionó que existía una relación entre la equidistancia a los extremos del segmento y la perpendicularidad entre la mediatriz y el segmento. Esto se debe a que no tuvieron la

capacidad para relacionar la existencia de una recta perpendicular al segmento *AB*. Por consiguiente se puede concluir que los alumnos no fueron capaces de determinar la existencia de un ángulo recto. Esta situación se debe a que este concepto no fue internalizado por el alumno, por lo tanto los alumnos no asocian la existencia de un ángulo recto en la intersección del segmento con su mediatriz.

<b>ENTREVISTA ALUMNO 1</b>	
PP	: No sabes, yo te voy a enseñar un poco, ahí, ahí, haremos y podemos hacer una circunferencia ya, vamos a marcar y la otra también ahí.
PP	: hay te va a quedar una intersección.
PP	: Así es, ahora me olvido de la otra dimensión, y puedo escoger un trozo más largo inclusive, a ya, pero lo escogeremos más pequeño, por aquí, la misma hay, y tengo mi intersección.
PP	: ¿Qué hago ahora?
AA	: Unirlos, unir los puntos.
PP	: Al unir estos puntos, estos dos puntos con una línea, que es lo que pasaba, acá tenemos un segmento.
AA	: Pues que formaban ángulos de 90 grados.
PP	: Muy bien, ¿cómo sabes que ángulos miden 90 grados? ¿Cómo llegas a saber esto?
AA	: Porque son algunos rectos.
PP	: Y como lo sabes.
AA	: Pues mirando.
PP	: ¿Pero como sabes que mide 90?
AA	: No lo sé.
AA	: Pues porque son totalmente perpendiculares.

**Tabla 9. Fragmento entrevista realizada al Alumno 1 referida a la perpendicularidad.**

Pero cuando se desarrollo la entrevista al Alumno 1 (**Tabla 9**), posterior al desarrollo de las actividades en la sesión, se pudo constatar que este alumno si llego a reconocer la existencia del ángulo recto al momento de construir la mediatriz. Eso sí que la construcción fue dibujada por el profesor-investigador, esto se debe a que se pretendía enseñar paso a paso el proceso de construcción de la mediatriz y fue en ese momento que el alumno reconoció la existencia de ángulos de 90°. Tal como lo manifiesta en la **Tabla 8**, en la que fundamenta su respuesta aludiendo a que solo mirando se dio cuenta de la existencia de un ángulo de 90°.

Es muy importante destacar que este alumno sí tenía los conocimientos previos para saber de los conceptos: *perpendicular* y *ángulo recto*, pero para llegar a esto fue necesario realizar preguntas motivadoras o claves que permitieron al alumno reconocer la existencia de estos conceptos. Ahora es importante destacar que el alumno si bien es cierto sabe que son perpendiculares, pero cuando se le pregunta como sabe de la existencia de ángulos de 90° simplemente responde que son “*totalmente perpendiculares*” (**Tabla 9**).

Por último se presenta la actividad en la que los alumnos construyeron con regla y transportador la mediatriz de un segmento para luego comprobar con 8 preguntas en la

que sabremos realmente si los alumnos han comprendido el concepto de mediatriz. Este tipo de actividades conlleva a un tipo de destrezas con un alto valor pedagógico ya que mediante un hecho experimental los alumnos podrán asimilar de forma concreta si ha habido un proceso de aprendizaje durante esta sesión.

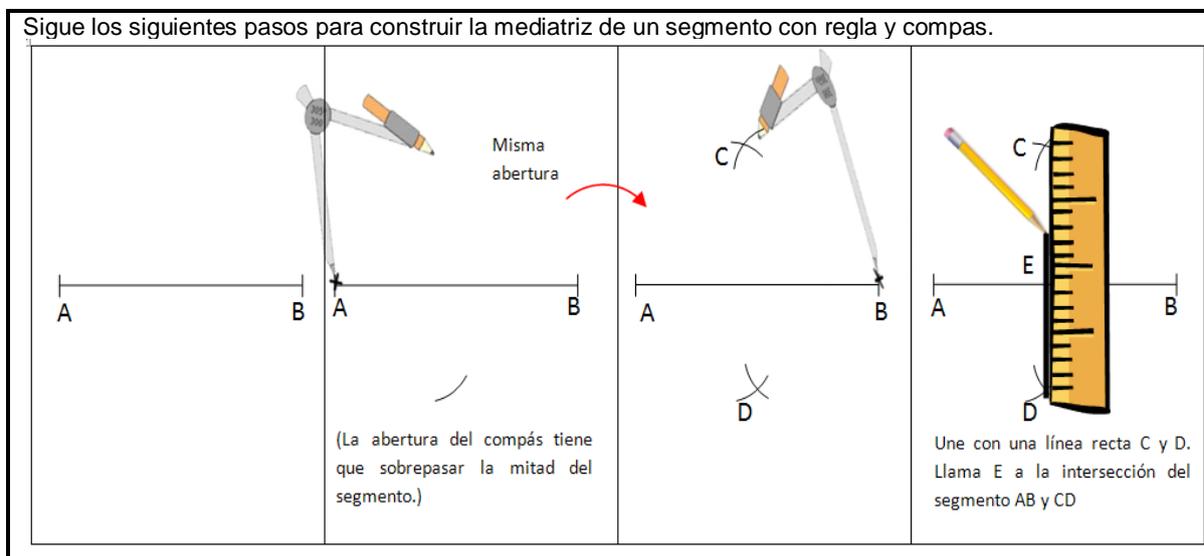


Figura 3. Procedimiento para la construcción de la mediatriz

En esta actividad se pudo constatar que a algunos alumnos se les dificulta el trabajar con este tipo de herramientas. Esto se debe a que no tienen una destreza para manipular el transportador, a pesar de mostrar mediante una figura la forma de cómo se utiliza siendo esta la herramienta fundamental para la construcción. Pero lo positivo es que cuando el profesor-investigador se acercó a los alumnos les explico el uso del transportador, lo cual fue muy enriquecedor para ellos, porque por si solos lograron finalizar con la construcción.

#### PREGUNTAS RELACIONADAS CON LA CONSTRUCCION DE LA MEDIATRIZ

- ¿Qué podemos decir del punto C respecto de los puntos A y B?
- ¿Qué podemos decir del punto D respecto de los puntos A y B?
- ¿Qué podemos decir del punto E respecto de los puntos A y B?
- ¿Por qué la recta que pasa por C y D es la mediatriz?
- ¿Es cierto que la mediatriz corta al segmento AB en el punto medio E?
- Comprobar con la escuadra o transportador que el ángulo formado por el segmento AB y la recta CD es de  $90^\circ$ . ¿Mide  $90^\circ$ ?
- ¿Podemos decir que la mediatriz de un segmento es la perpendicular en su punto medio?
- ¿Fuiste capaz de dibujar la mediatriz? Si tu respuesta es negativa explica porque no fuiste capaz de dibujarla.

#### Apartado final de la Unidad Didáctica.

Este apartado fue decisivo para determinar si los alumnos habían comprendido el concepto de mediatriz, y la respuesta es sí, pero la forma como se expresan los alumnos al momento de responder es bastante difusa, utilizando términos que no son los más

adecuados y no concuerda con lo que el alumno quiere decir verdaderamente. Esto se demuestra al analizar las respuestas dadas por los alumnos en este apartado, por ejemplo lo que responde Javi y Adriana (**Tabla 8**), en la que basan sus respuestas solo utilizando el concepto “medio”, este concepto para los alumnos tiene un trasfondo importante porque a través de éste se puede interpretar que mentalmente tiene una estructura bastante definida, ya que para ellos el “medio” es el lugar geométrico por el cual se traza la mediatriz, teniendo claro que existe equidistancia de cualquier punto de la recta a los extremos del segmento.

<b>RESPUESTAS ACTIVIDAD FINAL</b>	
<b>ALUMNOS</b>	<b>a) ¿Qué podemos decir del punto C respecto de los puntos A y B?</b>
JAVI	<i>Esta en medio de A y B.</i>
OSCAR	<i>Esta en medio.</i>
ADRIANA	<i>Que está a la misma distancia del punto A y B y por lo tanto es el medio.</i>
GUILLERMO	<i>Que C es una parte de la mediatriz de A y B también que tienen las mismas distancias.</i>
TANIA	<i>Que el punto c es perpendicular a la A y B.</i>
<i>Tabla 10a. Respuestas dadas por los alumnos al último apartado.</i>	
	<b>b) ¿Qué podemos decir del punto D respecto de los puntos A y B?</b>
JAVI	<i>En medio y en recta con la C.</i>
OSCAR	<i>Esta en medio.</i>
ADRIANA	<i>Que está a la misma distancia del punto A y B y por lo tanto es el medio.</i>
GUILLERMO	<i>Que es la segunda parte de la mediatriz de A y B.</i>
TANIA	<i>Que es perpendicular al punto A y B.</i>

**Tabla 10b. Respuestas dadas por los alumnos al último apartado.**

También se observa que las respuestas dadas por Adriana y Guillermo (**Tabla 8**) son consecuente con las respuestas dadas en otras actividades demostrando que la secuencia seguida en la unidad didáctica para lograr el aprendizaje fue el correcto, y por tanto determinar que estos alumnos han logrado incorporar un conjunto significativo de aprendizajes. Esto queda determinado por lo que dice Adriana (**Tabla 10a** y **Tabla 10b**) en la cual manifiesta que nuevamente las distancias desde los extremos del segmento, en cada caso, al punto C y D son las mismas, o sea la equidistancias es válida para ella, pero podemos decir que cuando habla de “medio” está manifestando que la línea que es la mediatriz pasa por el punto medio del segmento AB.

<b>RESPUESTAS ACTIVIDAD FINAL</b>	
<b>ALUMNOS</b>	<b>d) ¿Por qué la recta que pasa por C y D es la mediatriz?</b>
JAVI	<i>Por que pasa por el medio.</i>
OSCAR	<i>Porque es la mitad.</i>
ADRIANA	<i>Por que pasa por el punto medio del segmento AB.</i>
GUILLERMO	<i>Porque para hacer la mediatriz hay que unir los dos puntos.</i>
TANIA	<i>Por que pasa por el medio de la figura.</i>

**Tabla 11. Respuestas a la pregunta letra D dadas por los alumnos.**

Esta pregunta es la clave de toda la unidad didáctica, ya que es justamente esta la que permite determinar finalmente si el alumno ha logrado incorporar significativamente el aprendizaje del concepto mediatriz. Además esta es una pregunta motivadora ya que

tiene como característica principal que los alumnos busquen en su esquema mental la respuesta que permitirá concretar una definición mental de la mediatriz.

Estas respuestas (**Tabla 11**) dan a conocer que los alumnos al observar la figura y a su vez construir la mediatriz (Figura 3) esto les permite a los alumnos tener una visualización clara del concepto.

<b>ENTREVISTA ALUMNO 2</b>	
PP	: ¿Cuando trabajamos con la primera guía que es la guía de la mediatriz, te quedo clara la definición de la mediatriz?
AA	: si
PP	: ¿Y me la podrías explicar?
AA	: La mediatriz es una línea que está en <b>medio</b> de un segmento.
PP	: ¿Y por qué esta en el <b>medio</b> ?
AA	: Por que... no sé, porque se llama mediatriz por lo tanto esta en el <b>medio</b> .

**Tabla 12.** Entrevista alumno 2 en relación a la definición de mediatriz utilizando el concepto medio.

Una de las observaciones que han sido clasificados como una mala comprensión para los alumnos es saber utilizar algunos conceptos matemáticos de la forma correcta. Es así que todos los conceptos usados en matemáticas son definidos con rigurosidad, excepto los conceptos primarios, básicos o fundamentales. Pero ¿Cuáles son los conceptos primarios?, estos son elegidos tomando aquellos sobre los cuales tenemos muchas ideas intuitivas. Como por ejemplo *igualdad*, *punto*, *recta* y *plano* entre otros. En función de los conceptos primarios se definen los demás conceptos denominados derivados, y este estudio encontró un concepto utilizado frecuentemente por los alumnos sin saber concretamente su significado, que en este caso es el concepto de “*medio*”, este concepto sin lugar a duda para los alumnos tiene un significado múltiple, ya que todas sus respuestas están asociadas de alguna forma al concepto “*medio*” tal como lo demuestra las respuestas del Alumno 2 (**Tabla 12**), en la que expresa la definición de mediatriz utilizando tal concepto. La argumentación es bastante básica por el hecho de que justifica su definición de mediatriz diciendo que está en “*medio*” del segmento, y la razón es simplemente como se llama mediatriz esta pasa por el medio.

#### **4.1.2 Del papel y lápiz al uso del geogebra**

Enseguida se presenta el análisis sobre la forma de cómo se desarrolló el alumno en un entorno virtual. Para ellos se ha considerado incorporar a estas tareas las capacidades dinámica-interactivas proporcionadas por el software de geometría dinámica, en este caso el Geogebra, permitiendo generar un ambiente en el que los alumnos tengan la oportunidad de aprender a resolver actividades a través de la interacción y exploración con los objetos.

Si bien se podría analizar si el entorno del GeoGebra es aceptado por el alumno como cercano, cómodo y manejable, es importante tener en cuenta que este recurso orientado al aprendizaje de la matemática debiera conseguir que la atención del usuario se centrara en la resolución del problema haciendo que las dificultades de comunicación con dicho entorno no constituyan un obstáculo adicional.

El GeoGebra es un software educativo que permite un aprendizaje experimental y por descubrimiento, donde el diseñador crea ambientes ricos en situaciones que el alumno puede explorar. El alumno debe llegar al conocimiento a partir de experiencias, creando sus propios modelos de pensamiento, sus propias interpretaciones del problema, por lo que nos brinda un adecuado medio para nuestro objetivo.

### 4.1.3 La mediatriz en el Geogebra

A continuación se presentan las actividades que siguieron los alumnos con el Geogebra. El alumno debe construir determinada figura geométrica, esto exige al alumno hacer explícitas un mínimo de propiedades geométricas necesarias para describir formalmente la figura. Estas propiedades son reconocidas por el alumno debido a su proceso de enseñanza-aprendizaje que se ha establecido. Por otro lado si la construcción es incorrecta el propio alumno se dará cuenta y lo volverá a construir.

En nuestra propuesta didáctica las actividades de GeoGebra permiten reforzar el trabajo realizado con papel y lápiz y dar nuevos enfoques a los conceptos trabajados.

#### **ACTIVIDAD GEOGEBRA**

(1)

- a) Construye  $AB$ . Construye la mediatriz de  $AB$  siguiendo los pasos que se indican:
  - Construye el punto medio de  $AB$ , llámalo  $M$ .
  - Construye la perpendicular de  $AB$  que pasa por  $M$ .
- b) Desplaza los puntos  $A$  y  $B$  y observa las modificaciones de la figura. La recta que has dibujado, ¿Mantiene la condición de mediatriz de  $AB$ , es perpendicular en el punto medio? Si es así, la construcción es correcta; si no, deberás repetir la construcción.
- c) Comprueba, sobre la construcción que tienes en la pantalla, que los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del segmento. Sigue los pasos que se indican:
  - i. Construye un punto  $P$  en la mediatriz. Construye los segmentos  $PA$  y  $PB$ , mídelos y comprueba que miden lo mismo.
  - ii. Mueve el punto  $P$  de la mediatriz y comprueba que los segmentos  $PA$  y  $PB$  siguen midiendo lo mismo.
  - iii. Mueve los extremos  $A$  y  $B$  del segmento y comprueba que los segmentos  $PA$  y  $PB$  siguen midiendo lo mismo.
  - iv. Dibuja un segmento y construye la mediatriz utilizando la herramienta de mediatriz.

#### **Actividad 1. La Mediatriz en el Geogebra.**

En este momento los alumnos están muy entusiasmados simplemente por el hecho de ya estar trabajando con el ordenador. Esto de algún modo permite que los alumnos trabajen en un ambiente agradable y por ende el desarrollo de las actividades en el Geogebra son ejecutadas de muy buena manera. Y esto queda de manifiesto en el

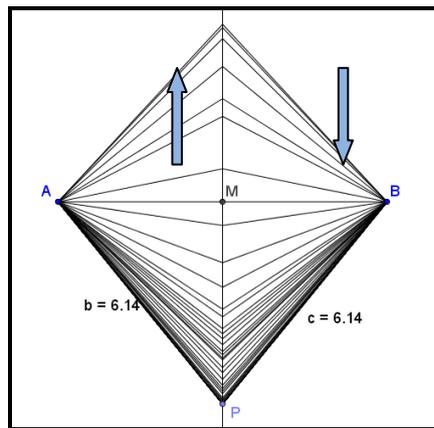
desarrollo del Primer Apartado (Actividad 1) ya que los alumnos al dibujar el segmento  $AB$  lo hacen de forma segura, ubicando el punto  $P$  sobre la recta perpendicular, para luego trazar los segmentos  $PA$  y  $PB$ . De esta manera el alumno comprueba desplazando el punto  $P$  de manera que dejan una huella visual sobre la mediatriz, es así que de manera empírica lo que ha estructurado utilizando los elementos manipulativos lo ha comprobado utilizando el Geogebra y por consiguiente comprueba que las distancias de cualquier punto sobre la mediatriz equidista de los extremos.

Esta secuencia de pasos les permitió a los alumnos tener una aproximación concreta de lo que es la mediatriz. Este paso fue fundamental para que el alumno se sintiera con la oportunidad de generar esa estructura mental definitiva del concepto de la mediatriz, tal como lo demuestra el Alumno 3 (**Tabla 12**).

<b>ENTREVISTA ALUMNO 3</b>	
PP	: <i>Eh cuando trabajamos la mediatriz, ¿la entendiste cuando trabajos con las fichas y la cuerda o la entendiste cuando la vimos en el Geogebra?</i>
AA	: <i>Con las fichas ya la entendí, <b>pero con el Geogebra ya lo vi del todo</b>, sabes.</i>
PP	: <i>Entonces el geogebra te ayudo enormemente.</i>
AA	: <i>Mucho, si por que no es como con la mano que tienes que hacer todas las líneas y todo eso, si no que con el geogebra con un clic y tienes todo hecho.</i>

**Tabla 14. Entrevista en relación al uso del Geogebra.**

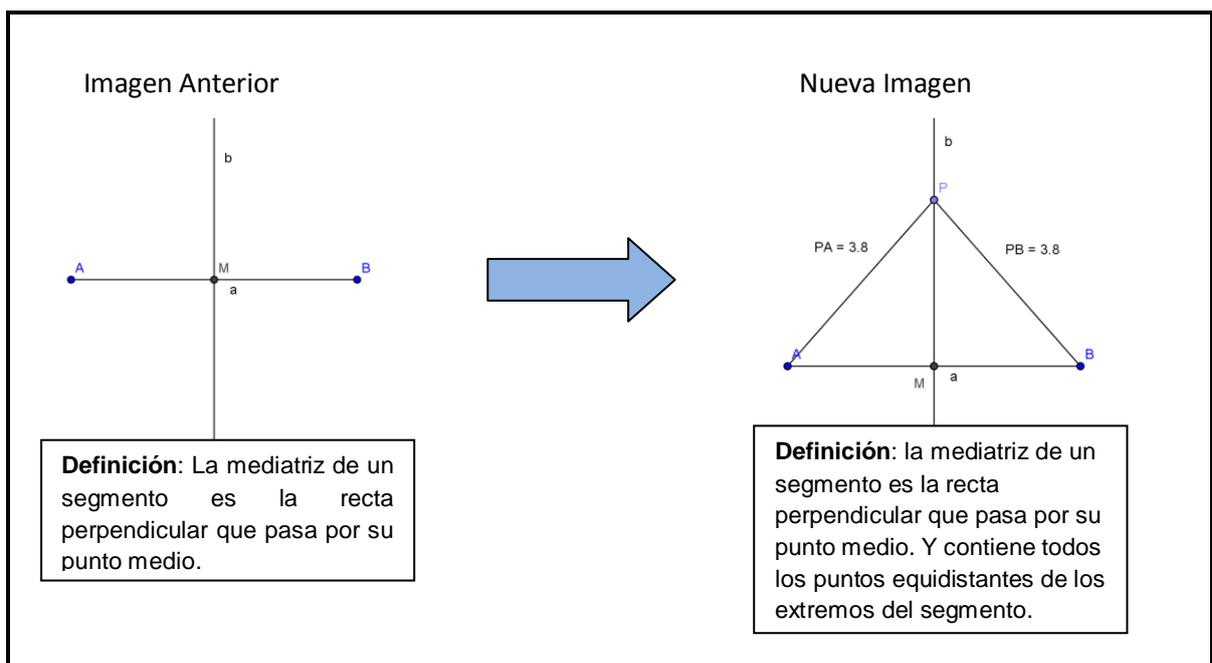
Si observamos la secuencia de la entrevista del Alumno 3 (**Tabla 14**) podemos concluir que este alumno mediante el trabajo manipulativo logro entender el concepto, pero a través del Geogebra ya lo entendió completamente, por lo tanto este alumno logro generar una estructura mental concreta, eso quiere decir que si lo ubicáramos en un nivel estaría en el de análisis (nivel de Van Hiele). Esto por que el alumno tiene la capacidad de describir las componentes y propiedades de la figura, y esto resulto por el procedimiento que se llevo a cabo que fue ir desde la observación hasta la experimentación.



**Figura 4. Procedimiento para comprobar la equidistancia de la mediatriz.**

Lo que se muestra en la **Figura 4** fue el desarrollo de los alumnos cuando procedieron a arrastrar el punto P sobre la mediatriz. Esta huella visual que se observa en la **Figura 4** es lo que el alumno debería imaginar cuando procede con el arrastre del punto P, por lo tanto a través la actividad de manipulación empírica los alumnos lograron descubrir la propiedad de equidistancia para la mediatriz.

Al arrastrar el punto P sobre la mediatriz permite generar una estructura mental concreta simplemente por el hecho de ser un movimiento mediante el Geogebra por lo tanto con el uso de este software generaron una nueva imagen del concepto tal como la muestra la **Figura 5**.



**Figura 5. Proceso de cambio de imagen.**

#### 4.1.4 La mediatriz en el triángulo

La siguiente actividad que se presenta guarda relación a incorporar la mediatriz a un triángulo cualquiera. Para ellos los alumnos construyeron en el triángulo sus correspondientes mediatrices (**Figura 6**). En esta fase es necesario que los alumnos tengan claro el uso de algunas herramientas del Geogebra, tales como: la construcción de un triángulo, construcción de la mediatriz, ubicar un punto en una intersección, estos procesos ya fueron anunciados en la guía de autoaprendizaje que desarrollaron los alumnos.

Luego de la construcción de las correspondientes mediatrices, los alumnos deberán razonar con respecto a punto en común que tienen las tres mediatrices llamada circuncentro. Esta actividad tiene la características que los alumnos deberán arrastrar los vértices del triángulo para ver como varia la posición del circuncentro.

##### **ACTIVIDAD 1**

(l)

- a) Construye un triángulo  $ABC$  y pinta de color rojo sus lados.
- b) Construye dos mediatrices del triángulo.
- c) Marca el punto de intersección de las dos mediatrices.
- d) Llama  $H$  al punto de intersección de las dos mediatrices.
- e) Construye la otra mediatriz del triángulo y comprueba que también pasa por el punto  $H$  (**circuncentro del triángulo**).
- f) Desplaza los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para comprobar que las tres mediatrices se siguen cortando en el punto  $H$ .

##### **Actividad 1. La mediatriz en el triángulo, apartado (l).**

Esta actividad fue de un grado de dificultad mayor ya que en esta sesión se observó que los alumnos no tenían un control absoluto de las herramientas para el normal desarrollo de las actividades. Pero esto fue resuelto a medida en que el profesor-investigador se acercaba a los grupos con mayor dificultad dando las indicaciones necesarias para que pudiesen construir lo pedido en la Actividad 1.

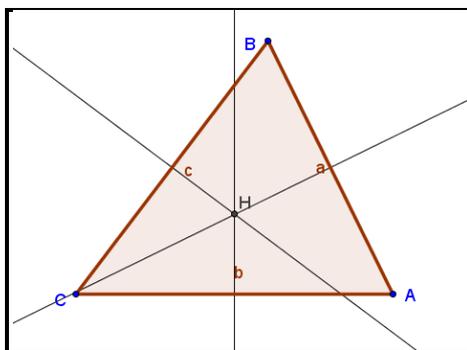


Figura 6. Proceso de arrastre vértices del triángulo ABC.

Esta actividad le permitió a los alumnos tener un acercamiento directo con el concepto de la mediatriz y la vez con la de circuncentro en el triángulo, que hasta este momento no lo habían estudiado. El proceso de enseñanza se llevo a cabo de forma normal para algunos grupos de trabajo, lo cual les permitió terminar prontamente la Actividad 1. Estos alumnos tienen una atracción por el ordenador que no fue necesario intervenir en su proceso aprendizaje para el concepto de circuncentro usando el Geogebra.

Una de las observaciones del profesor-investigador para la Actividad 1 en la que los alumnos se sorprendieron es que al momento del arrastre de uno de los vértices del triángulo, el punto H siempre se mueve sobre la mediatriz del lado opuesto al vértice que se está arrastrando. Para algunos alumnos esto fue clave para poder comprender es que consistía el circuncentro, debido a que estos observaron que las distancias desde el punto H hasta los vértices eran iguales.

Las reflexiones comentadas por los alumnos al momento del desarrollo de la actividad es que sin lugar a duda ponen en juego las actividades desarrolladas con papel y lápiz. En la que por medio del Geogebra tienen la posibilidad de movimientos tal como lo señala el Alumno 3 al momento de preguntar por el uso del Geogebra: *“Mucho, si por que no es como con la mano que tienes que hacer todas las líneas y todo eso, si no que con el geogebra con un clic y tienes todo hecho”*.

La siguiente actividad que se presenta es la continuación a la actividad 1, hablando de la construcción geométrica. Esta actividad permitirá a los alumnos comprobar a partir de los ángulos interiores del triángulo ver si el circuncentro, al proceder al arrastre de los vértice, si es que se mantiene en el interior, en la frontera o en el exterior.

II) Mide los ángulos del triángulo. Observa las modificaciones de la figura al desplazar los puntos  $A$ ,  $B$  o  $C$  y di donde está situado el circuncentro (en el interior del triángulo, en el exterior del triángulo o en un lado) según el tipo de triángulo (acutángulo, obtusángulo o rectángulo)

a) Relaciona el lugar donde se cortan las mediatrices con la clasificación de los triángulos según sus ángulos. Completa la siguiente tabla:

Clasificación de los triángulos según sus ángulos	Se cortan las mediatrices	¿Dónde se cortan las mediatrices?
Acutángulos		
Rectángulos		
Obtusángulos		

b) Construye la circunferencia de centro  $H$  que pasa por  $A$ . comprueba que también pasa por  $B$  y  $C$ , es decir que es la circunferencia circunscrita al triángulo.

c) Desplaza los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para comprobar que la circunferencia sigue estando circunscrita al triángulo.

**Actividad 1. Ubicación circuncentro en el triángulo. Apartado (II)**

Los alumnos como ya tienen construido el triángulo solo deben de medir los ángulos interiores que fue sin lugar a dudas la parte con mayor dificultad de desarrollar utilizando el Geogebra. Esto se debió a que para poder medir un ángulo debe tener cierto orden, que para nuestro caso sería seleccionar los vértices siempre de izquierda a derecha o más simple aún en contra de las manecillas del reloj (anti horario).

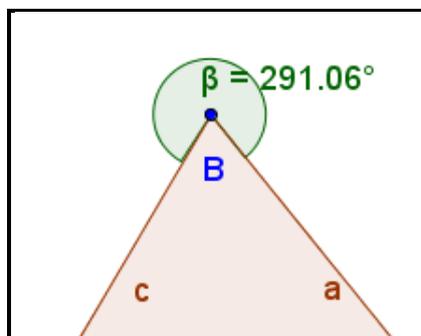


Figura 7. Medición del ángulo.

Para los alumnos esto fue lo más complicado debido a que les costó comprender que debían seguir un orden, como podemos observar en la Figura 7 los alumnos sin tener claro el proceso de medir el ángulo seleccionan cualquier vértice teniendo como resultado la medición del ángulo exterior. Esto se fue mejorando a medida que el profesor-investigador de forma explícita explicó para toda la clase como era el proceso de medir un ángulo en el Geogebra.

Al resolver lo anterior la situación no mejora mucho debido a que los alumnos no tienen claro las clasificaciones de los triángulos según sus ángulos: acutángulo, obtusángulo y rectángulo. Pero con la ayuda de la profesora titular de esa clase fuimos resolviendo dudas con respecto a clarificar que tipo de triángulo eran al momento de mover uno o varios de los vértices. Este desconocimiento de los alumnos con respecto a la clasificación de los triángulos fue algo que no estaba considerado al momento de construir el instrumento, ya que se consideró que era un aprendizaje previo y que no debería haber traído mayor dificultad en la resolución de la actividad.

Al momento de transformar el dibujo en cualquier tipo de triángulo (acutángulo, obtusángulo o rectángulo) los alumnos fueron observando cual era la posición del circuncentro moviendo los vértices del triángulo. Uno de los grupos logró ubicar los vértices de tal manera que les quedó un triángulo rectángulo, para los alumnos el solo hecho de construir un triángulo rectángulo fue un gran avance. De esta manera este grupo generó un nivel de comprensión en la cual ahora pueden asociar triángulo rectángulo a decir que el circuncentro se encuentra en la frontera (hipotenusa).

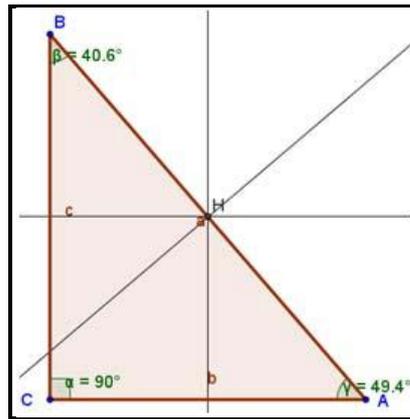


Figura 8. Circuncentro en un triángulo rectángulo.

La **Figura 8** muestra el momento en la cual los alumnos lograron ubicar los vértices de tal forma que formaron un triángulo rectángulo. Antes de lograr la Figura 8 se necesitó comenzar con el proceso de arrastre de los vértices, pero los alumnos observaron que al mover el vértice C el triángulo pierde la condición de rectángulo, por lo tanto es de gran valor para el estudio, ya que los alumnos fueron capaces de, a partir del método arrastre de la forma ensayo error, determinar que al mover el vértice donde se forma el ángulo recto éste se transforma en un triángulo cualquiera. Por lo tanto solo arrastraron los vértices A y B.

Es así que se los alumnos se percatan que al mover el vértice A o B en forma lineal, o sea arrastrar por sobre los catetos de tal manera que siga siendo triángulo rectángulo, observan que el circuncentro se mantiene siempre en el mismo lugar, o sea en el lado opuesto del ángulo recto (hipotenusa).

Además un grupo va observando las distancias desde los vértices al circuncentro, para este nivel es algo poco usual, pero uno de ellos se preguntó si las distancias desde los vértices al circuncentro eran las mismas. Esta pregunta realizada como comentario a su compañero demuestra que se visualizó lo que serían los radios de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Por lo tanto este alumno, adelantándose a la actividad siguiente, generó una estructura mental básica inicial, que le permitirá resolver de forma positiva y rápida la construcción de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

Siguiendo con el análisis para esta actividad se puede decir que para desplazar los vértices y dejar un triángulo acutángulo el proceso fue llevado de mejor forma, debido a que para ellos solo desplazaron un vértice, de tal forma que los tres ángulos interiores fuesen agudos, tal como se muestra en la Figura 9A, este desplazamiento permitió determinar que el circuncentro siempre se mantenga dentro del triángulo.

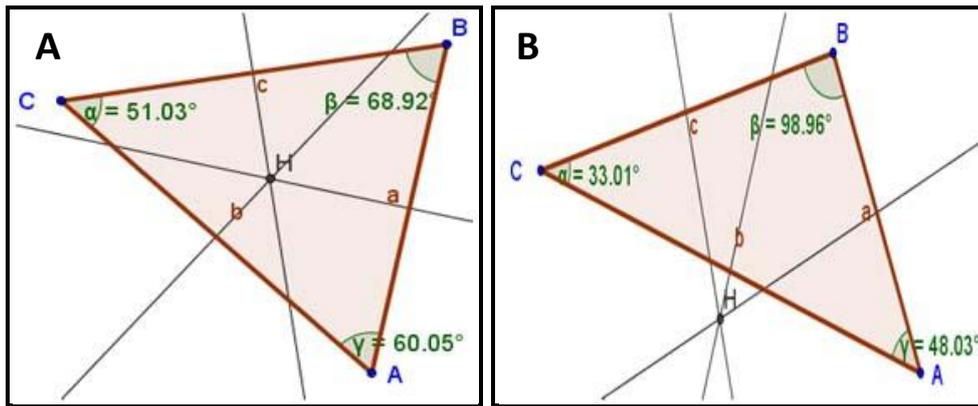


Figura 9. Circuncentro en un triángulo acutángulo y obtusángulo.

La Figura 9B muestra el resultado de los desplazamientos hasta poder construir un triángulo obtusángulo, esto se llevó con toda normalidad simplemente a que con las dos construcciones anteriores se generara una experiencia para llegar al resultado que se deseaba. De esta manera los alumnos observaron que el circuncentro se encuentra en el exterior del triángulo ABC.

Luego de desplazar para ver lo que sucedía con el circuncentro, algunos grupos de alumnos observaron que al seguir una secuencia ordenada, en este caso desplazar el vértice B linealmente, de tal manera que fuese cambiando la ubicación del circuncentro, se preguntaban entre ellos que el cambio de una posición del circuncentro a otra siempre era la misma. Eso quiere decir que al mover el vértice B dejando el triángulo acutángulo primero, el circuncentro se mantiene dentro del triángulo, luego desplazado el vértice B para dejar un triángulo rectángulo, el circuncentro queda ubicado en la hipotenusa y finalmente al dejar en un triángulo obtusángulo el circuncentro queda fuera.

Es así que los alumnos determinaron que existe una secuencia lógica para ellos que sería el siguiente:

- 1° Triángulo acutángulo: circuncentro interior del triángulo. (Figura 10)
- 2° Triángulo rectángulo: circuncentro hipotenusa del triángulo. (Figura 11)
- 3° Triángulo obtusángulo: circuncentro exterior del triángulo. (Figura 12)

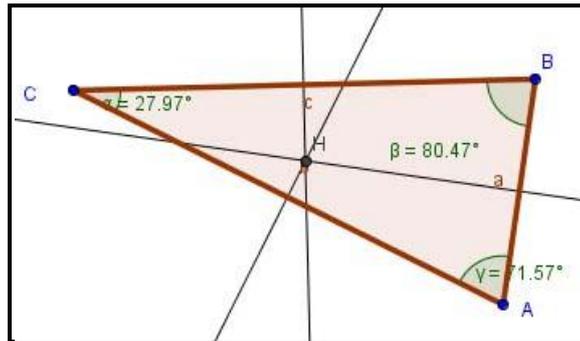


Figura 10. Triángulo Acutángulo – Circuncentro interior.

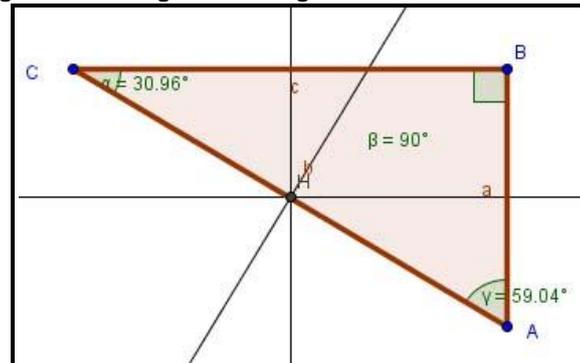


Figura 11. Triángulo Rectángulo. Circuncentro hipotenusa.

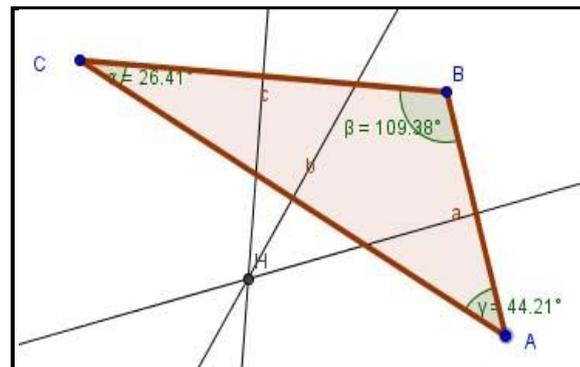


Figura 12. Triángulo Obtusángulo. Circuncentro exterior.

Esta conclusión se llevo a cabo por consecuencia del desarrollo de la actividad en la los alumnos debían clasificar donde se cortan las mediatrices (circuncentro). Por lo tanto ellos creen que el circuncentro no puede pasar del interior al exterior sin pasar por la hipotenusa del triángulo. Esta conclusión puede ser muy simple pero para nuestro estudio es importante ya que eso demuestra que estos alumnos han generado una estructura mental en que distinguen una secuencia básica para saber en qué lugar se encuentra el circuncentro.

#### 4.1.5 Aplicación en la resolución de problemas

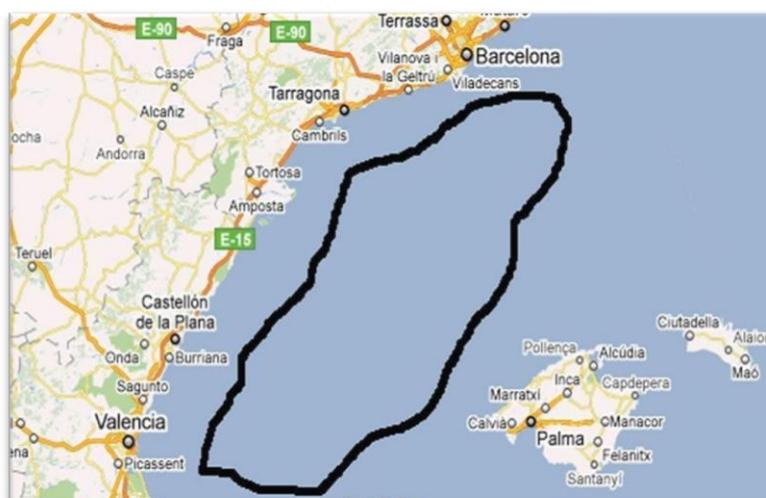
El enunciado siguiente corresponde a la construcción de la mediatriz y de la circunferencia circunscrita en el triángulo ABC. Para este enunciado los alumnos se dieron cuenta de la existencia de una misma distancia desde el circuncentro a los

vértices, tal como se menciono antes, este les permitió construir de forma rápida el circunferencia utilizando la herramienta que facilita el Geogebra.

Por último se presenta la actividad 2, en la que los alumnos deberán aplicar todos los aprendizajes relacionados con el concepto de mediatriz y circuncentro.

**ACTIVIDAD 2**

1. Un estudio de la superficie marina demostró que frente a la costa entre Barcelona y Valencia se ha detectado un yacimiento petrolífero de gran magnitud. La empresa petrolífera ubicara un estación de bombeo dentro del yacimiento que enviara el preciado metal a estas dos ciudades, pero esta debe estar ubicada de tal forma que las conexiones mediante tuberías sea la misma a las dos ciudades. ¿Dónde debería estar ubicada la estación de bombeo?
2. La ciudad de la Palma está muy interesada por tener petróleo desde este yacimiento, es así que pide que se le envíe también. ¿Cuál sería la nueva ubicación de la estación de bombeo para que las distancias sean las mismas a las tres ciudades? simula las situaciones en el Geogebra.



**Actividad 2. Problema sobre la mediatriz y el circuncentro**

Para ello se diseño un problema que debe ser resuelto primero aplicando la mediatriz para la primera pregunta. Y luego resolver la pregunta 2 aplicando el concepto de circuncentro. Esto permitirá a los alumnos ampliar sus imágenes conceptuales acerca de objetos y procesos matemáticos aprovechando la mediación instrumental.

<b>ENTREVISTA ALUMNO 2</b>	
PP	: Si no hubiésemos utilizado el geogebra para resolver el problema del yacimiento de petróleo, lo hubieses podido hacer sin el uso del geogebra.
AA	: Si.
PP	: ¿Cómo?
AA	: Pues haciendo la mediatriz.

**Tabla 15. Fragmento entrevista sobre desarrollo problema.**

Para esta actividad los alumnos ya tenían un manejo positivo del Geogebra, es así que para ellos el resolver el problema no fue muy difícil. Tal como lo expresa el Alumno 2

en la **Tabla 15**. Demostrando que el concepto aplicado a un problema es de fácil solución para él, por consiguiente el Alumno 2 posee una estructura mental desarrollada para el concepto de mediatriz de un segmento. Es así que este alumno presenta un nivel de concreción con respecto al concepto muy elevado, por lo tanto es capaz de conectar conceptos matemáticos a problemas que se le plantean. En este caso cuando se le presenta el problema lo asocia inmediatamente al concepto de mediatriz de un segmento.

Pero por otro lado tenemos al Alumno 3 (**Tabla 16**) que si bien es cierto es que presenta menos dificultad para resolver las actividades, si los presenta al momento de resolver la actividad 2 (Yacimiento de Petróleo).

<b>ENTREVISTA ALUMNO 3</b>	
PP	: Si ahora nos vamos a la parte de triángulos, donde tuvimos que hacer el problema aquel del petróleo, el del yacimiento de petróleo. ¿Leíste el problema cierto?
AA	: Sí.
PP	: ¿Lo entendiste inmediatamente o te costo un poco entenderlo?
AA	: <b>un poco me costo, pero cuando vi el mapa en el ordenador y si tuviera un poco de tiempo las cosas ya entenderé.</b>

**Tabla 16. Fragmento entrevista Alumno 3.**

Tal como se puede leer en el fragmento de la entrevista el Alumno 3 (**Tabla 16**) tuvo dificultad para responder a esta actividad, sin embargo, afirma que si le damos más tiempo para pensar cómo resolver lo entendería y lo resolvería. Esto permite determinar que este alumno a pesar de observar que posee las habilidades necesarias para resolver se muestra un poco inseguro a la hora de responder. Lo anterior permite conjeturar que este alumno genero una imagen mental simple del concepto de la mediatriz y por tanto que llevado a la práctica no fue lo suficiente para resolver el problema del yacimiento petrolero con fluidez.

Siguiendo con el análisis para la Actividad 1 primera pregunta, los alumnos fueron muy certeros al momento de su desarrollo, ya que los grupos fueron capaces de construir un segmento que une a la ciudad de Valencia con Barcelona para luego trazar su mediatriz, tal como lo muestra la **Figura 13**. Esto confirma que los alumnos en general generaron una estructura mental muy amplia, logrando desarrollar una definición del lugar geométrico de la mediatriz; la recta que pasa por el punto medio del segmento, pero cuando se le pregunta por la posibilidad de ubicar la estación de bombeo responden ubicando como posible lugar la intersección del segmento con la mediatriz.



Figura 13. Respuesta a la primera pregunta del Problema.

La respuesta de estos alumnos refleja que los alumnos no son capaces de asociar la existencia de posibles soluciones con lo que tienen ya estructurado como imagen mental, por lo tanto estos alumnos solo poseen un nivel de comprensión del concepto básico o de nivel de reconocimiento.

Por otro lado se tiene las respuestas dadas (**Tabla 17**) por los alumnos en que de forma precisa explican en qué lugar debe quedar la estación de bombeo. Por ejemplo la respuesta de Javi-Eric tiene como característica que ellos asociaron inmediatamente la mediatriz como solución al problema. Para ello trazaron la mediatriz del segmento que une las dos ciudades y luego concluyeron que, con un lenguaje poco formal, la estación debería estar ubicada en la zona del petróleo pero sobre la mediatriz. Esto demuestra que los alumnos tienen el conocimiento sobre la igualdad de distancias desde la mediatriz a las ciudades (equidistancia) por lo tanto lograron generar una imagen mental en la que fueron capaces de reconocer las propiedades de la mediatriz y poderlas utilizar como respuesta a este problema.

<b>RESPUESTAS DADAS AL PROBLEMA DEL PETROLEO (ACTIVIDAD 2)</b>	
JAVI-ERIC	<i>Tenemos que hacer una línea entre Barcelona y Valencia, después tenemos que hacer la mediatriz entre los dos puntos pero hay que ponerlo en la zona de petróleo que hay en el mar pero también hay que ponerlo el punto en la línea de la mediatriz.</i>
TANIA-OSCAR	<i>Primero hay que crear un segmento entre Barcelona y Valencia. Después tenemos que hacer la mediatriz de ese segmento. Entonces el trozo de la mediatriz que queda dentro del petróleo es donde podemos crear en cualquier punto de ese trozo el extractor de petróleo.</i>

Tabla 17. Respuestas expresadas por los alumnos actividad 1 primera pregunta.

Pocos alumnos son capaces de responder que existen un conjunto de puntos que satisface a la pregunta número 1 tal como lo demuestra la **Figura 14** recuperada de un grupo de alumnos. Esta respuesta refleja que poseen una visualización o una imagen del

concepto más amplia, deduciendo que la respuesta no es única, sino más bien es un conjunto de puntos en la que sobresaltan marcando con una línea de color rojo que se encuentran sobre la mediatriz pero que está dentro del área donde se encuentra el yacimiento de petróleo.



Figura 14. Respuesta a la primera pregunta del Problema.

Finalmente la respuesta a la pregunta 2 para algunos grupos de trabajo les resulto fácil de resolver, claro que para llegar a la solución final fue necesario que el profesor le guiara en el proceso de la resolución. Tal como lo expresa el Alumno 1 en la **Tabla 18**, pero además fue fundamental el uso del Geogebra para que el alumno tuviese las herramientas necesarias para lograr finalizar con esta actividad.

Es así que este alumno generó sus de aprendizajes ayudado de elementos externos, como son el profesor y el ordenador. Sin embargo este alumno logro generar una estructura mental del concepto de circuncentro mediante el uso del geogebra.

<b>FRAGMENTO ENTREVISTA ALUMNO 1</b>	
PP	<i>Si, antes de resolverlo en el ordenador, tú te imaginaste como lo podrías haber hecho.</i>
AA	<i>mmmm no.</i>
PP	<i>¿Por qué no?</i>
AA	<i>Porque solo leyendo es más difícil de resolver.</i>
PP	<i>¿Y qué te ayuda a resolverlo?</i>
AA	<i>Las explicaciones que dabas y el uso del ordenador, el uso del geogebra.</i>
PP	<i>¿Tú me dices que el uso del ordenador te ayudo a poder entender de mejor forma el problema?</i>
AA	<i>Si.</i>

Tabla 18. Fragmento de entrevista relacionada ayuda de elementos externos.

Si observamos la solución al problema en la **Figura 15** podemos interpretar que los alumnos que llegaron a esta solución comprendieron que la existencia de 3 puntos no colineales determinan un triangulo, que en este caso sería el triangulo que se forma por las tres ciudades (Barcelona-Valencia-Palma), por lo tanto estos alumnos aplicaron correctamente la definición de mediatriz en el triangulo. En consecuencia lograron

encontrar el circuncentro sin mayor dificultad, ahora lo más importante es que observaron que la intersección de las mediatrices determina un punto que tiene una característica con respecto a las distancias hasta las ciudades, que son iguales, por lo tanto determinaron que la estación de bombeo debe ser construida en la intersección de las tres mediatrices.



Figura 15. Solución problema pregunta 2.

## 4.2 Presentación y análisis de las actividades para la bisectriz

Este apartado muestra el proceso de análisis correspondiente a una sesión de trabajo relacionado con el concepto de la bisectriz. Esta sesión se dividió en dos partes una de ellas fue el trabajo manipulativo utilizando papel, para posterior aplicar lo el concepto en actividades ejecutadas en el Geogebra. Para ello se ha elaborado un análisis descriptivo de lo descrito por los alumnos en las sesiones de trabajo complementando el análisis con una entrevista realizada a los alumnos estudiados. Para ellos los intervinientes en la entrevista son dos personas: el profesor-investigador (PP) y el alumno (AA).

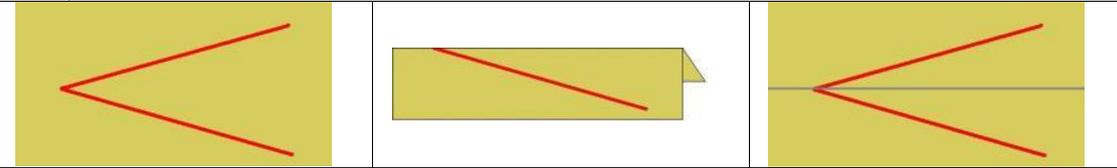
Es importante destacar que el desarrollo de esta actividad fue concebida por los alumnos considerando que ellos ya poseían un conocimiento previo respecto al concepto en cuestión. De esta manera los alumnos han respondido utilizando la definición que ellos poseen de la bisectriz.

Este apartado tendrá solo el análisis de una sección de la sesión de trabajo, ya que el tiempo no fue el suficiente para terminar todas las actividades de la unidad didáctica.

### 4.2.1 La bisectriz en el papel

Para esta sesión se ha diseñado un conjunto de actividades en la que los alumnos tuviesen que manipular un papel. Esto permitirá a los alumnos poder tener una primera aproximación visual del concepto de la bisectriz de un segmento. Para ello se elaboró un conjunto de preguntas que permitirá a los alumnos conjeturar posibles respuestas con respecto el procedimiento que se llevará a cabo manualmente.

**ACTIVIDAD 1:** Dibujamos un ángulo en un papel y doblamos la hoja de manera que coincidan los lados del ángulo:



1. ¿Cómo divide la línea formada por el doblar al ángulo?
2. ¿Qué te sugiere la línea que queda demarcada por el doblar con respecto al ángulo?

**Actividad 1. Tercera sesión.**

Como ya se ha explicado en la metodología, el trabajo manipulativo juega un rol importante al momento de lograr generar aprendizaje, es así que esta actividad no está exenta de lograr tal propósito. Como observamos en las respuestas dadas por los alumnos en la **Tabla 1**, el hecho de trabajar con papel logro en los alumnos tener una primera aproximación visual del concepto de la bisectriz, tal como lo demuestran Javi, Eric , Xavi y Adriana, dando como respuestas que existe una línea que divide al ángulo en dos partes iguales. Pero por otro lado están las repuestas de Guillermo que tan solo reflexiona diciendo que solo divide al ángulo, siendo poco certero en su respuesta. Y por ultimo tenemos la respuesta de Oscar en la que alude a la a que esta línea divide al ángulo por la mitad.

<b>RESPUESTAS ACTIVIDAD 1 PREGUNTA 1</b>	
<b>ALUMNO</b>	<b>¿Cómo divide la línea formada por el doblar al ángulo?</b>
JAVI	Divide al ángulo en dos partes iguales.
OSCAR	Lo divide por la mitad con la bisectriz.
ERIC	Dividir al ángulo en dos partes iguales.
GUILLERMO	Dividiendo el ángulo.
XAVI	En dos partes iguales.
ADRIANA	La línea divide al ángulo en dos partes iguales.

**Tabla 1. Respuestas recogidas de las actividades.**

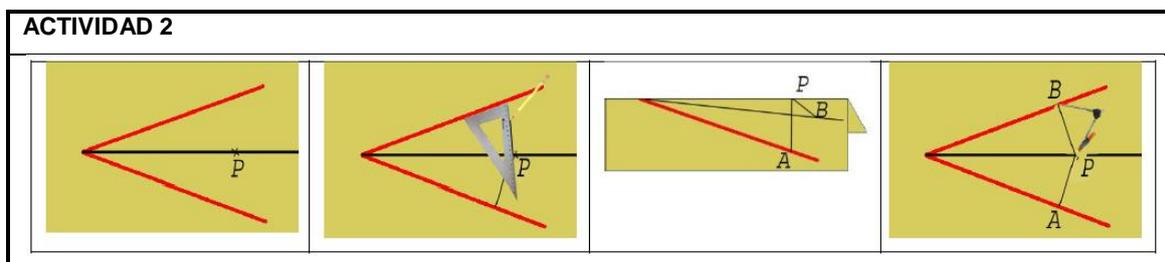
Es así que las respuestas dadas por los alumnos implícitamente reconocen la existencia de una línea, y esta línea es la que divide al ángulo en dos partes iguales. No obstante estas respuestas no reflejan que los alumnos dedujeran la existencia de una recta (como una imagen mental) para que así asocien que esta línea divide tanto al ángulo interior como exterior en dos partes iguales.

<b>RESPUESTAS ACTIVIDAD 1 PREGUNTA 2</b>	
<b>ALUMNOS</b>	<b>¿Qué te sugiere la línea que queda demarcada por el dobles con respecto al ángulo?</b>
JAVI	la bisectriz
OSCAR	la bisectriz de un ángulo
ERIC	partes iguales
GUILLERMO	que esta al medio del ángulo
XAVI	que es la mitad
ADRIANA	la línea es la bisectriz del ángulo que lo divide en dos partes iguales

**Tabla 2. Respuestas pregunta 2.**

Los alumnos al responder esta pregunta son capaces de deducir que esta línea divide al ángulo en partes iguales, ahora esto se debe al hecho de haber manipulado un elemento que les permitió de forma visual reconocer la división del ángulo. Ahora si observamos la Tabla 2 podemos decir que estos alumnos consideran que utilizando el mismo concepto como respuesta queda justificado lo que quieren decir, por lo tanto esto nos permite poder interpretar que estos alumnos no poseen un lenguaje muy amplio para dar a conocer lo que realmente quieren decir. Sin embargo la alumna Adriana responde de forma certera a esta pregunta, y esto nos permite aventurarnos a decir que ella junto a Eric, poseen una aproximación mental hacia el concepto de la bisectriz. Considerando lo anterior estos alumnos se encuentran en nivel de reconocimiento en la que son capaces de ver los atributos de la bisectriz hasta este momento.

La siguiente actividad que se presenta hace referencia a determinar que la distancia de un punto cualquiera sobre la bisectriz esta a igual distancia de las semirectas que definen el ángulo. Para que los alumnos logran reconocer esta propiedad se elaboró una actividad de manipulación utilizando papel, escuadra y transportador.



**Actividad 2. Reconociendo las distancia.**

Esta actividad generó entusiasmo por parte de los alumnos, por lo menos de los que habían traído sus materiales de trabajo. Pero lamentablemente varios de los presente lograban trabajar cuando los materiales utilizados por los grupos quedaban libres, por lo tanto para estos grupos la actividad no llegó a su término. No obstante los alumnos que trajeron sus materiales sí que lograron terminar la actividad y así de esta manera lograron aproximar a la realidad lo que se quiere enseñar. Por consiguiente los alumnos elaboraron su propio pensamiento con respecto a la bisectriz, es así que algunos de ellos jamás se imaginaban que encontrar esta propiedad. Tal como lo expresó Guillermo cuando se le acercó al profesor-investigador diciendo que “esto jamás me lo imaginé”, esto permite interpretar que este alumno le ayudó bastante poder trabajar la bisectriz utilizando material manipulativo, generando una imagen mental en que ahora es capaz de reconocer propiedades que a simple vista no son observables por los alumnos.

La actividad 3 que a continuación se presenta fue diseñada estratégicamente para que los alumnos luego de seguir los pasos indicados observaran y reflexionaran sobre la intersección de las bisectrices, es así que los alumnos a partir de la manipulación de un papel pudiesen encontrar el punto de intersección, que para este caso sería el incentro.

**ACTIVIDAD 3**

- *Coge un papel, recórtalo de tal manera que formes un triángulo.*
- *Dobla desde el vértice al lado opuesto del triángulo, de manera que coincidan los lados. Marca esa línea con un lápiz.*

a) *¿Qué observas en el primer doble?*

1. *Al repetir el proceso anterior pero con otro vértice. (Marcar la línea con un lápiz).*

a) *¿Existe intersección de las líneas? \_\_\_\_\_*

b) *¿Qué puedes concluir del tercer doble con respecto a la intersección?*

**Actividad 3. Tercera sesión.**

Esta actividad requería solamente que el alumno pudiese manipular un papel y recortarlo de tal manera que construyeran un triángulo. La mayoría de los alumnos, por las observaciones realizadas, construyó un triángulo acutángulo. Este tipo de triángulo les permitió a los alumnos poder aplicar los dobles sin mayor dificultad.

Las respuestas dadas por los alumnos en la primera pregunta (**Tabla 3**) expresan lo que de algún modo ellos se imaginaban antes de desarrollar la actividad, simplemente porque la bisectriz es fácil de reconocer y visualizar. Por lo tanto los alumnos tenían muy claro lo que estaban haciendo, tal como lo demuestra Eric en su respuesta: “es *la bisectriz del primer ángulo*”, confirmando que este alumno ya reconoce la propiedad que tiene la bisectriz. Esto nos permite determinar que el procedimiento que se ha llevado a cabo es significativo para el alumno y así tener la convicción de que ellos han generado una estructura mental a un nivel de comprensión con respecto a la bisectriz.

<b>RESPUESTAS DADAS LUEGO DE FINALIZAR LA ACTIVIDAD 3</b>	
<b>ALUMNOS</b>	<b>a) ¿Qué observas en el primer dobles?</b>
JAVI	Es la bisectriz del primer ángulo.
OSCAR	-----
ERIC	En la bisectriz del primer ángulo.
GUILLERMO	Se parte por la mitad el triángulo.
XAVI	Que esta por la mitad.
ADRIANA	Que esta es la bisectriz del ángulo.

**Tabla 3. Respuestas actividad 3 pregunta a.**

Además esta experiencia permitió a los alumnos acercar los conocimientos de la bisectriz al triángulo, aplicando así sus conocimientos previos sumados a los que ya han logrado incorporar hasta el momento.

Luego los alumnos siguieron doblando el papel encontrando dos segmentos que tienen un punto en común. Este procedimiento, el de aplicar un segundo dobles, permitió a los alumnos visualizar la posibilidad de que el tercer dobles también se interceptara en ese punto en común. El profesor-investigador se percató de que algunos alumnos se aventuraban a lo que sucedería, de tal manera que sus comentarios entre ellos era que la tercera bisectriz pasaría sin lugar a duda por aquel punto llamado incentro. Ellos utilizan el concepto de incentro simplemente porque en la guía de trabajo está definido el concepto.

<b>RESPUESTAS DADAS LUEGO DE FINALIZAR LA ACTIVIDAD 3</b>	
<b>ALUMNOS</b>	<b>b) ¿Qué puedes concluir del tercer dobles con respecto a la intersección?</b>
JAVI	Es el punto de las bisectrices y el incentro
ERIC	es el punto de la bisectriz, el incentro
GUILLERMO	que unidos hacen un triángulo más pequeño
XAVI	Que se cruzan las tres líneas.
ADRIANA	Que los dos lados son iguales.

**Tabla 4. Respuestas actividad 3 pregunta b.**

Tal como algunos alumnos se aventuran a decir que el tercer dobles se intersecaría con las otros dos dobles, esta pregunta ratifica a los alumnos lo que habían conjeturado, tal como lo demuestra Xavi (**Tabla 4**) diciendo que las tres líneas se cruzan, pero también tenemos la respuesta de Guillermo que trata de concluir aventurando una respuesta en la que nos dice que estos dobles forman nuevos triángulos más pequeños. De esta forma podemos decir que Guillermo no ha logrado observar en la figura de papel ninguna otra característica y que el procedimiento utilizado con el papel no ha permitido visualizar las bisectrices del triángulo.



## 5. Conclusiones, prospectiva e implicaciones

---

### 5.1 Conclusiones

Para poder responder a la pregunta de investigación planteada al inicio de este trabajo se han ido desarrollando unas actividades en el aula para dar respuesta a dicha pregunta y determinar qué aspectos favorecen el aprendizaje de conceptos y objetivos geométricos, en este sentido se han establecido una serie de conclusiones generales y otras más específicas del trabajo realizado, señalando algunos de los aspectos destacables que se han puesto de manifiesto en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje, atendiendo a los diferentes componentes básicos del proceso educativo. Estos componentes son los niveles cognitivos de los alumnos y las actividades planteadas en la unidad didáctica:

#### 5.1.1 En relación a los alumnos

En relación a los alumnos, la utilización de la unidad didáctica, plantea la posibilidad de que esté dirigida a una población homogénea en cuanto a las edades pero con niveles cognitivos y capacidades en diferentes (Hiele). La metodología implementada que consistió en un trabajo por pareja por parte de los alumnos favoreció la comunicación entre ellos, debido a las preguntas que surgían al momento de resolver una actividad, ya sea mediante la manipulación o el uso del Geogebra. El desarrollo de las sesiones permitió determinar que los alumnos se sienten más protagonistas de su propio aprendizaje facilitando de esta manera el proceso de aprender a aprender, permitiendo a la vez un acercamiento de la geometría a los alumnos de una manera más experimental y menos teórica.

Por otro lado se debe considerar que los conceptos estudiados ya habían sido trabajados en el cursos anteriores, pero esto no fue impedimento para que los alumnos complementaran aun más su aprendizaje con respecto a los conceptos trabajados, es así que cuando los alumnos respondieron la primera pregunta de la actividad 2 de la unidad didáctica, en la que no estaba nombrado el concepto, ellos respondieron aludiendo al concepto de mediatriz, y además sin que el profesor lo nombrara, por consiguiente, me

permitió determinar que los alumnos lograron reconocer sin mayor inconveniente el concepto y de esta manera comenzar a determinar en qué nivel se encuentran.

### **5.1.2 En relación a la interacción de los elementos manipulativos y el uso del geogebra**

En relación a la interacción de los elementos manipulativos, estos permitieron, mediante las observaciones hechas a los alumnos, decir que estos se aproximan de una forma intuitiva al concepto de mediatriz. Lo anterior se establece considerando que los alumnos presentan un lenguaje, tanto escrito como hablado, poco preciso. Siendo sus respuestas de nivel muy bajo. Sin embargo las actividades realizadas con el Geogebra permitieron a los alumnos, de una forma experimental, comprobar de manera generalizada las propiedades de la mediatriz, permitiendo así a los alumnos concretar un razonamiento simple, logrando generar una estructura cognitiva, estableciendo una organización mental de la mediatriz de un segmento.

Las actividades planteadas en relación a la mediatriz en el triángulo permitieron determinar inicialmente que los alumnos presentan dificultad para clasificar el triángulo dependiendo de la posición del circuncentro, ya sea en el interior, en la frontera o en el exterior. Pero esta dificultad queda cerrada en el instante en que el profesor clarifica esta situación, de esta manera los alumnos lograron identificar de forma clara que tipo de triángulo era según la ubicación del circuncentro.

Al finalizar cada conjunto de actividades se plantean problemas de resolución en la que se deben aplicar los conceptos trabajados. En este momento los alumnos presentan una asimilación (Ausubel, 1983) del concepto de mediatriz y de sus propiedades, aunque lo expresan con un lenguaje poco preciso. Los alumnos aplican sus conocimientos a los problemas teniendo claro como debe ser resuelto mediante el geogebra, utilizando el concepto de mediatriz a la resolución del problema, sin embargo al consultarles por la posibilidad de desarrollar la misma actividad sin el apoyo del geogebra ellos concluyeron que no serían capaces de resolverlos. Esto nos indica que el geogebra sin lugar a duda, es una ayuda importante a la hora de resolver problemas, permitiendo al alumno tener una aproximación inicial al momento de ver el problema en el fichero especialmente diseñado para esta ocasión.

En términos generales los alumnos que participaron del estudio presentan capacidades cognitivas diferentes, por lo tanto cada alumno, por medio de las actividades planteadas, han logrado internalizar el aprendizaje de manera significativa siendo en la entrevista final la instancia para determinar tal aprendizaje. Una situación favorable para

el aprendizaje fue el hecho de poder trabajar en forma conjunta dos tipos de enseñanza diferentes, tal como fue el uso del papel y lápiz como el uso del ordenador, al existir una fusión entre ambos le permitió a los alumnos concretar sus aprendizajes por dos vías diferentes, pero que estaban estratégicamente ligadas.

## **5.2 Prospectiva**

A partir de la pregunta de investigación, se pueden desarrollar nuevas perspectivas e interrogantes factibles de ser estudiadas, en esta situación se puede extender a Chile pero en la que los alumnos tengan entre 15-16 años, en donde las posibilidades de resultados sean similares a los obtenidos en el presente estudio. Otra posible investigación podría ser abordar a los futuros profesores y ver de qué manera pueden incorporar a su que hacer pedagógico la utilización de estas dos forma de enseñanza fusionadas.

Finalmente y a partir de los resultados obtenidos por nuestra investigación queda abierta la posibilidad de aplicar el instrumento en dos clases de zonas geográficas diferentes, de esta manera se podrán comparar los resultados y ver que las consecuencias de la manera de enseñar tienen los mismos resultados.

## **5.3 Implicaciones didácticas**

Una de las principales implicaciones didácticas de este trabajo, es tener en cuenta que los profesores pueden generar actividades utilizando métodos diferentes, pero que uniéndolos son el complemento perfecto para lograr que el alumno mejore sus conocimientos geométricos. A la vez los profesores deben tomar conciencia de los aspectos mediados por los elementos manipulativos y software que influyen en el aprendizaje de sus alumnos permitiendo de esta manera a mejorar las competencias básicas que posee un alumnos de 1° de ESO, tal como pensar y razonar matemáticamente ya que ellos experimentan, intuyen, relacionan conceptos y realizan abstracciones, inducciones y deducciones, particularizan y generalizan, argumentan las decisiones tomadas y eligen los procesos a seguir.



## 6. Bibliografía

---

- ALSINA, C., BURGUES, C. (1987): "*Invitación a la Didáctica de la Geometría*", Editorial Síntesis.
- AUSUBEL, D.P. (2002). "*Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*". España: Paidós.
- BALLESTERO, E., (2007): "*Instrumentos psicológicos y la teoría de la Actividad instrumentada: Fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos Tecnológicos en los procesos educativos*". Cuadernos de investigación y formación en educación matemática 2007, año 3, número 4, pp. 125-137.
- COBO, P. (1998): "*Análisis de los procesos cognitivos y de la interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de caso*". *Doctoral Dissertation*. Universitat Autònoma de Barcelona.
- DUVAL, R. (2001): "*La Geometría desde un punto de vista cognitivo*", PMME- UNISON.
- GÓMEZ, P., y RICO, L. (Eds.) (2001). "*Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*". Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada.
- FORTUNY, J. M. (1982), "*Una manera de introducir el concepto de mediatriz*", L'ESCAIRE N° 9. PAG 7-8.
- GUTIÉRREZ, A. (1991). "*Procesos y Habilidades en Visualización Espacial*". Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia (España). Memorias de 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática.

- GUTIÉRREZ, A. (2005): "*Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica*", en Maz, A.; GÓMEZ, B., y TORRALBO, B. (eds), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*
- IRANZO, N., FORTUNY, J. M. (2009). "*La influencia SGD en las estrategias de resolución de problemas de geometría*". En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 3321-332). Badajoz, España: SEIEM.
- IRANZO, N., FORTUNY, J. M. (2009): "*La influencia conjunta del uso de Geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado*". *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 443-446.
- LATORRE, A.; DEL RINCÓN, D. Y ARNAL, J. (2003). "*Bases metodológicas de la investigación educativa*". Barcelona: Gr 92.
- MORA, J.A. (1995). "*Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría*". *UNO* nº 3. 101-115.
- MURILLON, J. R. (2000): "*Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO*". Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.
- PEA, R. (1985). "*Beyond amplification: Using computers to reorganize mental functioning*". *Educational Psychologist*, 20, págs. 167-182.
- PLANAS, N. e IRANZO, N. (2009); "*Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas*". *Revista Latinoamericana de Investigación Educativa* 12(2): 179-213.
- RABARDEL, P (1995): "*Les hommes et les technologies: una approche cognitive des instruments contemporains*". Paris, France: Armand Colin.

SCHOENFELD, A. (1987). "*Cognitive Science and Mathematics education*". Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

TREFFERS, A. (1987). "*Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction: The Wiskobas Project*". Nueva York, NJ: Springer.

TROUCH, L. (2004): "*Managing THE complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students` command process through instrumental orchestrations*". International Journal of Computers for mathematical Learning, 9(3), 281-307.

VAN HIELE, D. (1981): "*Van Hiele's levels*". Revista Mathematic Teacher, 81.

VALLES, E., YABAR, J. M., MARGALEF, N., (2007): "*Matemáticas 1º ESO*", Editorial Teide.

VERILLON, P. y RABARDEL, P. (1995): "*Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity*", European Journal of Psychology in Education, 10(1), págs. 77-101.

YÁBAR, J. M. (2000). "*El constructivismo en la práctica*", *Claves para la Innovación Educativa*, Editorial Grao, págs. 133-142.

ZIMMERMANN W., CUNNINGHAM, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington, D.C. Mathematical Association of America.

FORTUNY, J. M. , Una manera de introducir el concepto de mediatriz, SCAIRE N° 9.  
PAG 7-8, 1982

# Apéndice

---

## Apéndice I: Instrumento 1. La Mediatriz.

GUÍA N° 1 DE MATEMATICAS  
1° DE ESO

NOMBRE: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_/04/2010  
MATERIALES

- Cuerda, Lápiz, transportador, escuadra, fichas y cuaderno.

### ACTIVIDAD 1:

Tenemos una hoja con dos puntos A y B, una cuerda y un conjunto de fichas.

Coloca una ficha de tal manera que las distancias de esta a los puntos sea la misma (equidistancia de los puntos). Haz lo mismo con las siguientes fichas.

1. ¿Qué particularidad ves en este conjunto de fichas al observar cómo están colocadas?

---

---

---

2. ¿Qué sucede si pones la cuerda sobre las fichas entre la primera y la última?
  - a. ¿Podrías decir que las fichas están alineadas? ¿Por qué?

---

---

---

- b. ¿Si queremos agregar más fichas sin medir (sin cuerda) que cumplan esta condición donde la pondrías? ¿por qué?

---

---

---

### ACTIVIDAD 2:

En un papel marca dos puntos A y B y el segmento que los une . Luego coge el papel y dóblalo colocando el punto A sobre el B marcando la línea. Comprueba con la cuerda las distancias entre los puntos A y B y uno o dos puntos de la línea.

- a) ¿Qué características tienen los puntos de esta línea con respecto a los puntos A y B?

---

---

---

- b) ¿Puedes asociar la actividad 1 con la actividad 2?

---

---

---

**ACTIVIDAD 3:**

1. Hemos dibujado dos puntos y el segmento que los une, si hemos doblamos la hoja de manera que los puntos A y B coincidan, vemos que queda marcada una recta. que llamamos mediatriz del segmento AB. ¿Cómo puedes explicar que es la mediatriz de un segmento AB?

---

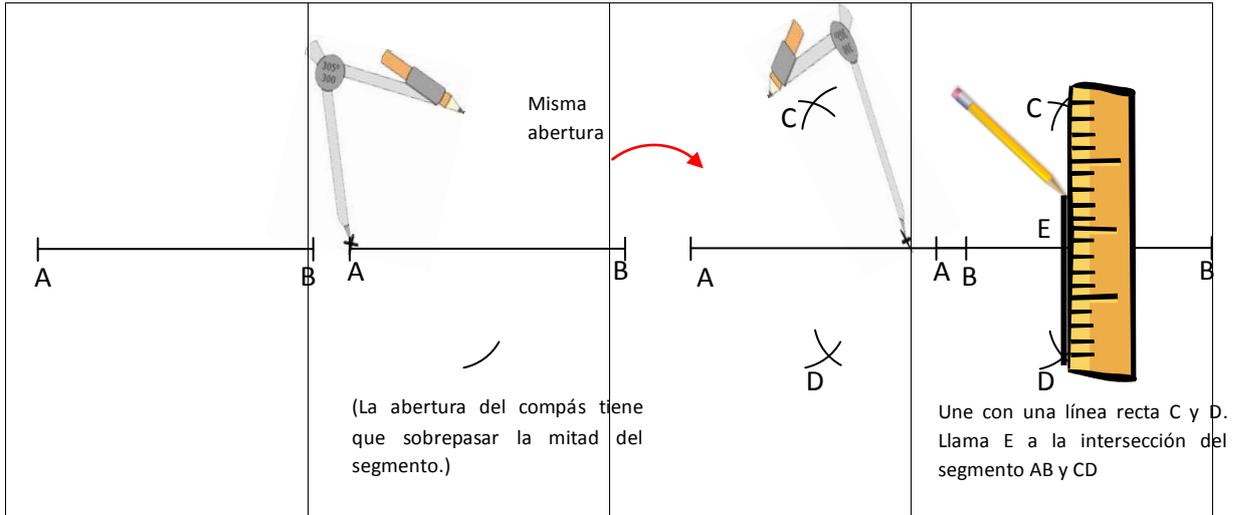


---



---

Sigue los siguientes pasos para construir la mediatriz de un segmento con regla y compas.



- i) ¿Qué podemos decir del punto C respecto de los puntos A y B?

---



---



---

- j) ¿Qué podemos decir del punto D respecto de los puntos A y B?

---



---



---

- k) ¿Qué podemos decir del punto E respecto de los puntos A y B?

---



---



---

- l) ¿Por qué la recta que pasa por C y D es la mediatriz?

---



---



---

- m) ¿Es cierto que la mediatriz corta al segmento AB en el punto medio E?.

---



---



---

n) Comprobar con la escuadra o transportador que el ángulo formado por el segmento AB y la recta CD es de  $90^\circ$ . ¿Mide  $90^\circ$ ?

---

---

o) ¿Podemos decir que la mediatriz de un segmento es la perpendicular en su punto medio?

---

---

p) ¿Fuiste capaz de dibujar la mediatriz? Si tu respuesta es negativa explica porque no fuiste capaz de dibujarla.

---

---

---

## Apéndice II: Instrumento 2. Práctica de autoaprendizaje Geogebra

### INTRODUCCIÓN AL PROGRAMA

#### Guía N° 2

### DE GEOMETRÍA DINÁMICA GEOGEBRA

#### 1º DE ESO

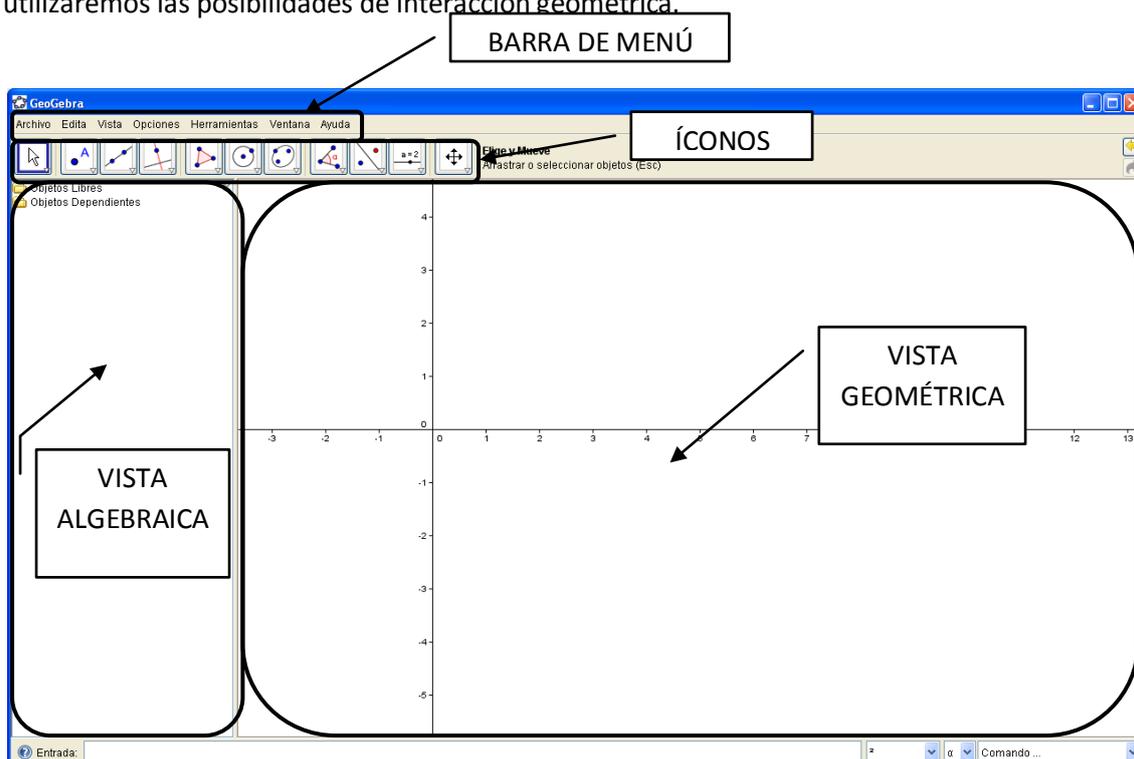
NOMBRE: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_/04/2010

Un programa informático de geometría dinámica permite dibujar figuras geométricas. Es muy útil para construir figuras, evidentemente, pero también y sobre todo, para desplazarlas, ampliar, deformarse o "animarlas", y para experimentar y conjeturar.

En esta guía didáctica presentamos el programa GeoGebra, que en los cursos nos permitirá trabajar algunos elementos geométricos. El GeoGebra es un programa de libre distribución y se puede bajar de internet desde <http://www.geogebra.org/cms/>

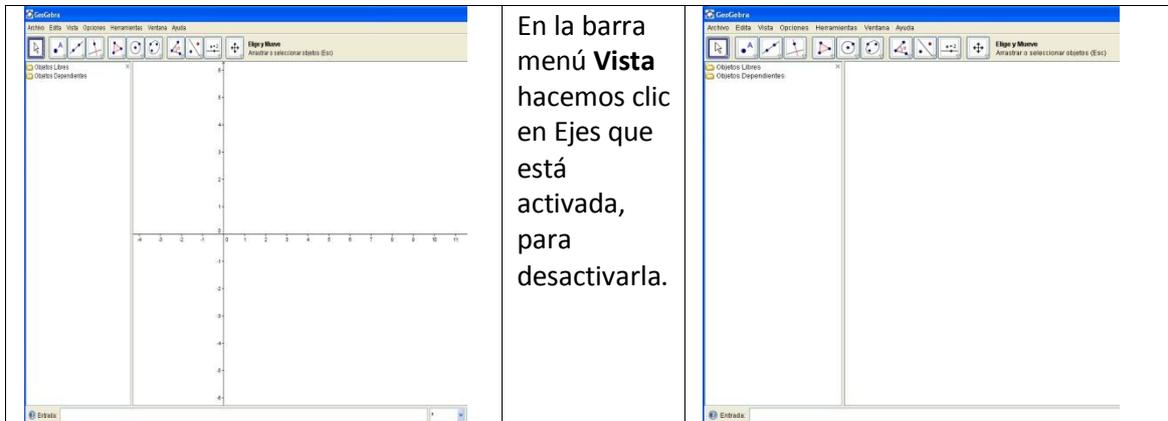
La mejor forma de aprender a manejar el GeoGebra es usándolo. Es sencillo y no daremos, por tanto, muchas "instrucciones de uso". De todos modos, tengamos en cuenta que es necesario un cierto tiempo para familiarizar con el programa.

Es un programa interactivo que combina geometría, álgebra y cálculo. En este curso sólo utilizaremos las posibilidades de interacción geométrica.



## Abrimos el programa GeoGebra

Como la pantalla que nos aparece al inicio muestra todas las posibilidades del programa haremos desaparecer los ejes de coordenadas. Para ello:



## Para crear un punto o para construir

Clickeamos en el segundo icono. Se despliega un grupo de herramientas. Seleccionamos la herramienta **Nuevo Punto**.

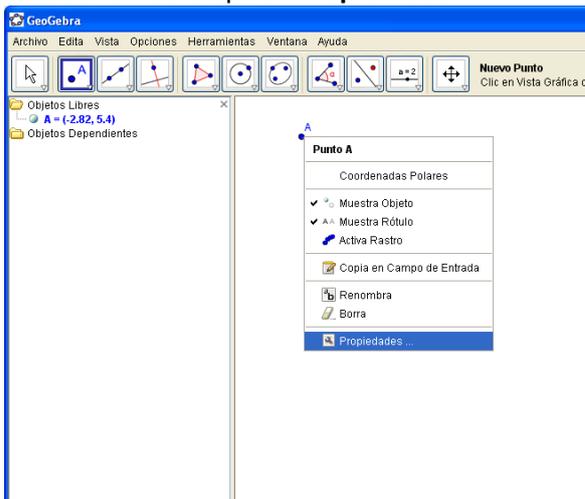


Hacemos clic en la pantalla.

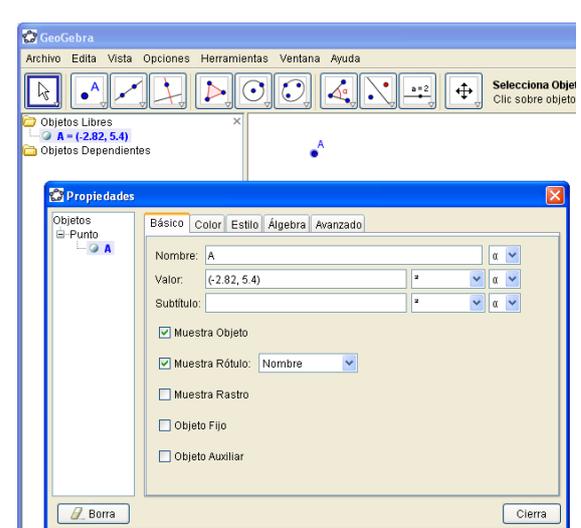


## Cambiar nombre a los objetos

Clickeamos con el boton secundario del ratón y seleccionamos la opción **Propiedades**



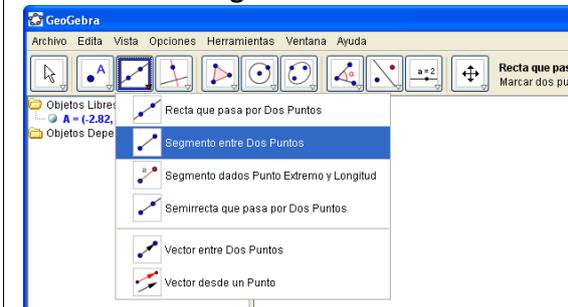
Clicquemos en la opción **Nombre** y se procede a cambiar al nombre deseado.



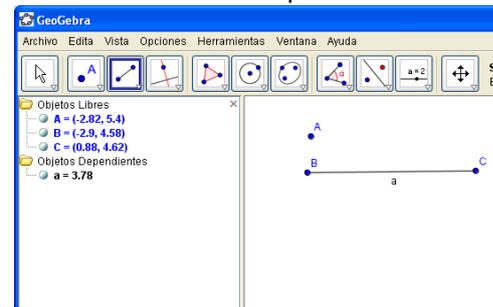
Clicquemos en el boton **Cerrar** y el cambio se a realizado.

## Para construir un Segmento

Clickeamos en la tercera herramienta y seleccionamos **Segmento entre Dos Puntos**.



Hacemos dos clic en la pantalla.

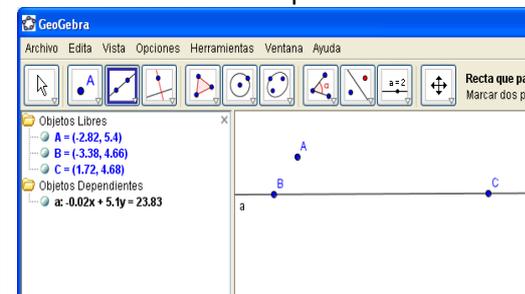


## Para construir una Recta

Clickeamos en la tercera herramienta y seleccionamos **Recta que pasa por Dos Puntos**.

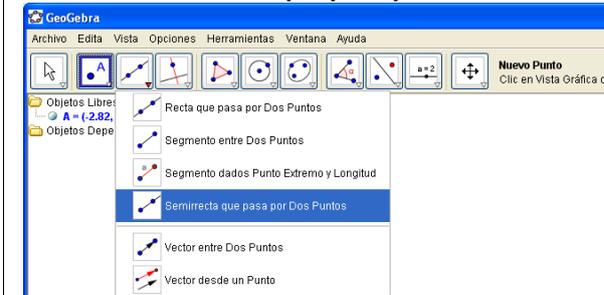


Hacemos dos clic en la pantalla.

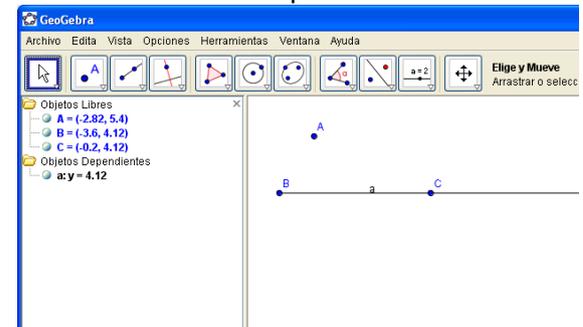


## Para construir una Semirrecta

Clickeamos en la tercera herramienta y seleccionamos **Recta que pasa por Dos Puntos**.

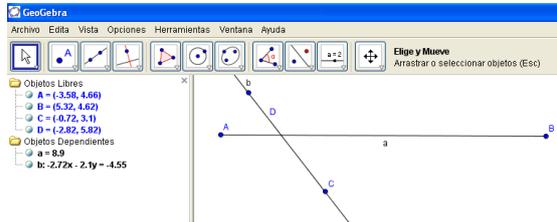


Hacemos dos clic en la pantalla.



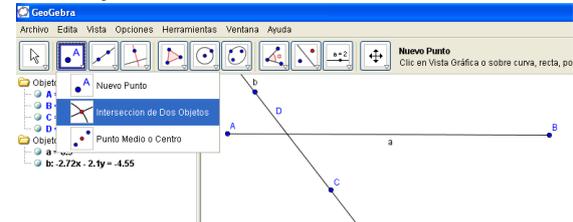
## Para ubicar un punto en una intersección

Si tenemos un segmento, una recta o una semirrecta que intersecta a un segmento una recta o una semirrecta.

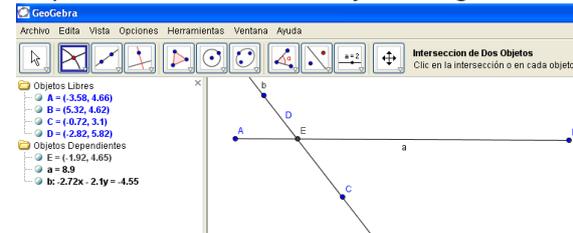


En este caso un segmento que intersecta a una recta.

Clicamos en el segundo icono y seleccionamos la herramienta **Intersección de Dos Objetos**.



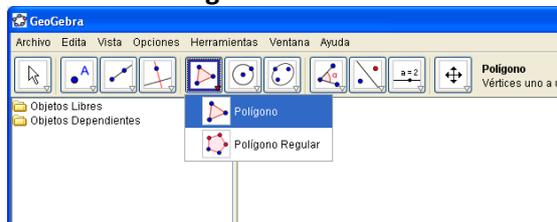
Clicamos sobre los dos objetos elegidos.



Y automáticamente se marca la intersección con un punto.

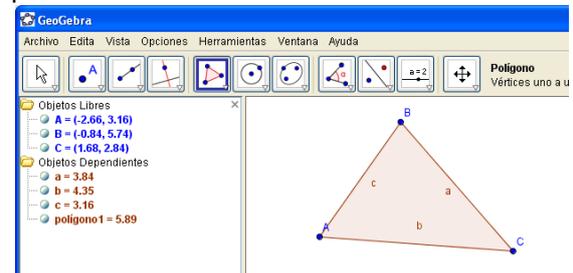
## Para construir un triángulo

Clicamos en el quinto icono. Se despliega un grupo de herramientas. Seleccionamos la herramienta **Polígono**.



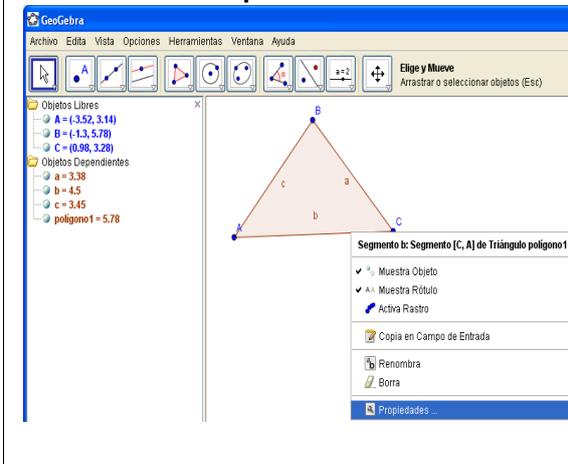
Para dibujar un polígono cualquiera, dibujamos tantos puntos como vértices tenga el polígono y hacemos clic en el punto inicial.

Hacemos clic en 3 puntos terminando con el punto inicial.

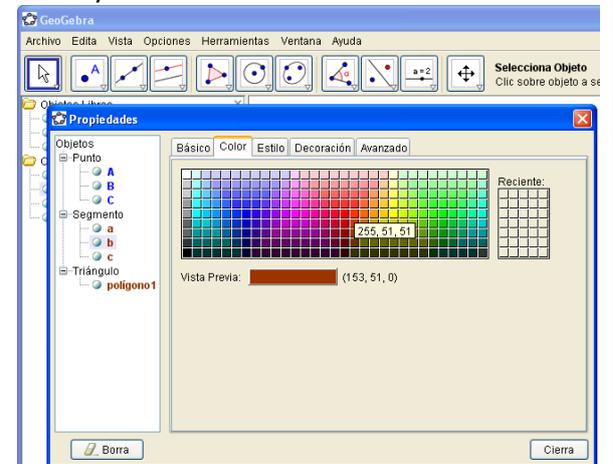


## Para cambiar de color a los objetos

Seleccionamos el objeto a cambiar de color y con el botón secundario del ratón seleccionamos **Propiedades**.

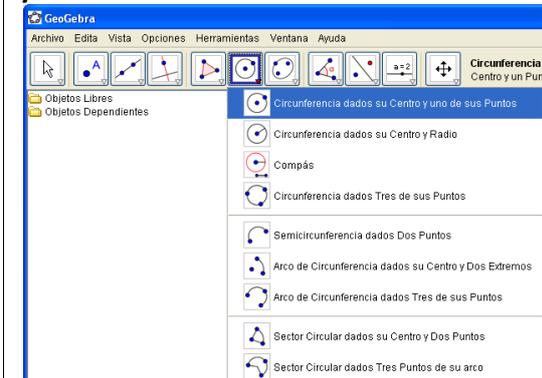


De las etiquetas elegimos **Color**, seleccionando el color deseado. Finalmente presionamos en cerrar y el cambio se ha efectuado.

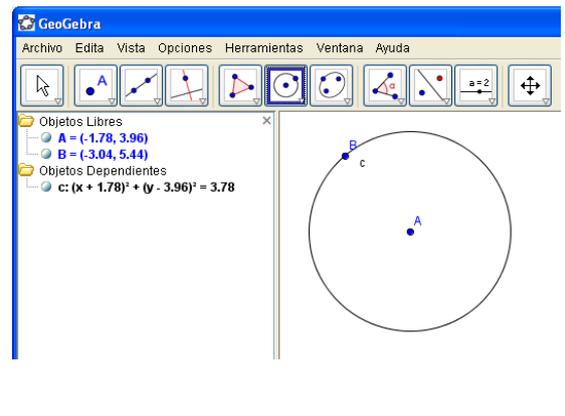


Para construir una circunferencia denotando su centro y un punto por donde pasa.

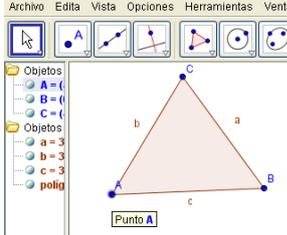
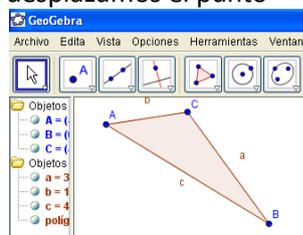
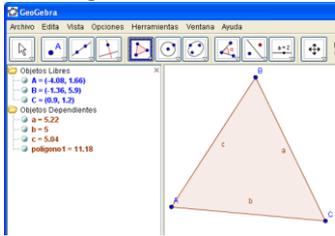
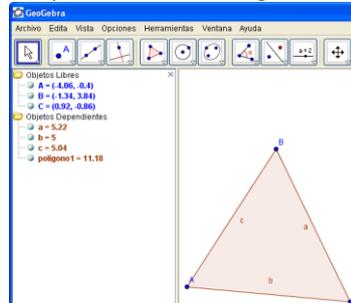
Clicamos en el sexto icono. Se despliega un grupo de herramientas. Seleccionamos la herramienta **Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos**.



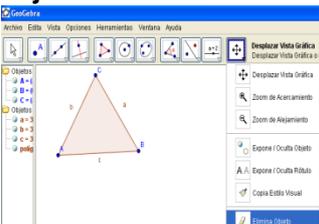
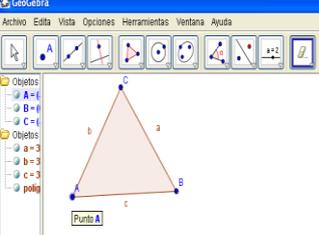
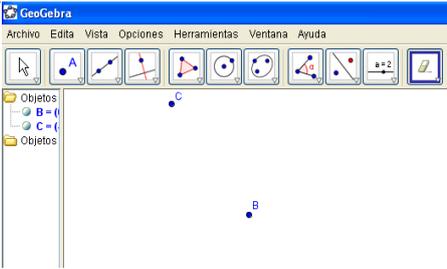
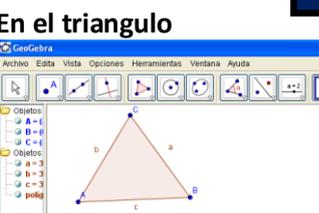
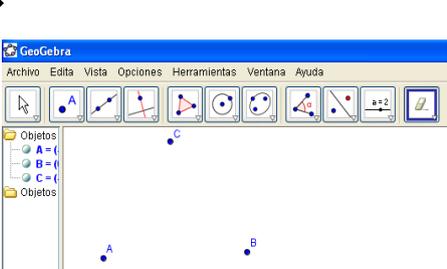
Hacemos clic en dos puntos, el primero es el centro y el segundo es el punto de la circunferencia.



## Para mover o manipular un objeto

<p>Clickeamos en el primer icono y se despliega un grupo de herramientas. Seleccionamos la herramienta</p> 	<p>Nos ponemos encima del objeto: El punto A:</p> 	<p>Pulsamos el botón del ratón y, sin dejar de pulsar, arrastramos el ratón y desplazamos el punto</p> 
<p>El triángulo ABC:</p> 	<p>Desplazamos el triángulo:</p> 	

## Para borrar objeto

<p>Clickeamos el onceavo icono. Se despliega un grupo de herramientas. Seleccionamos la herramienta <b>Elimina Objeto</b></p> 	<p>Seleccionamos el objeto que queremos borrar, es decir, nos ponemos sobre el objeto y se hace clic: En el Punto A</p> 	
<p>En el triángulo</p> 		

### Para crear una Nueva Ventana

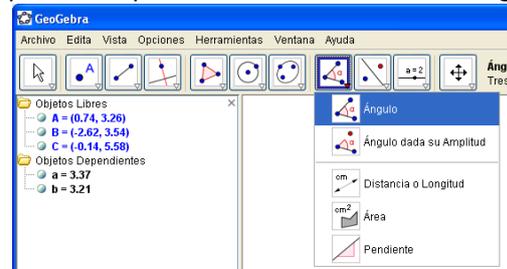
Para una Nueva Ventana cliqueamos en la barra de menú archivo y pulsar en la opción **Nueva Ventana**.

### Para Guardar un Archivo

Para guardar un archivo cliqueamos en la barra de menú archivo y pulsar en la opción **Guardar Como....**

### Para construir y medir un ángulo

Dibujamos con segmentos un ángulo. Cliqueamos el octavo icono. Se despliega un grupo de herramientas. Seleccionamos la herramienta **Ángulo**. Cliqueamos en los tres puntos para determinar el ángulo.

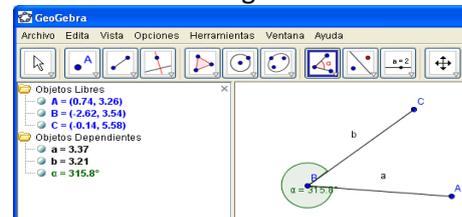


El orden de marcado es importante al momento de medir, se marca en sentido anti horario. (contrario a las manillas del reloj)

En este caso marcamos primero el punto A luego el B y finalmente el punto C.

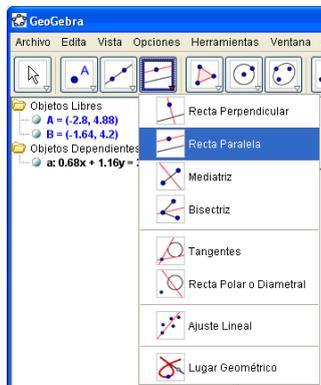


Del lo contrario si marcas el punto C luego el B y finalmente el A, les enviara la medición del ángulo exterior.

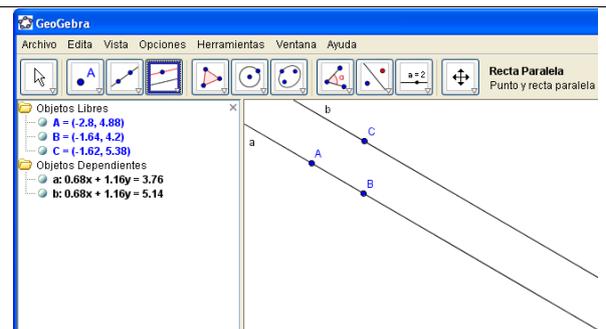


### Para construir una recta paralela

Creamos un segmento o una recta, luego cliqueamos en el cuarto icono, se despliega un grupo de herramientas. Seleccionamos **Recta Paralela**.

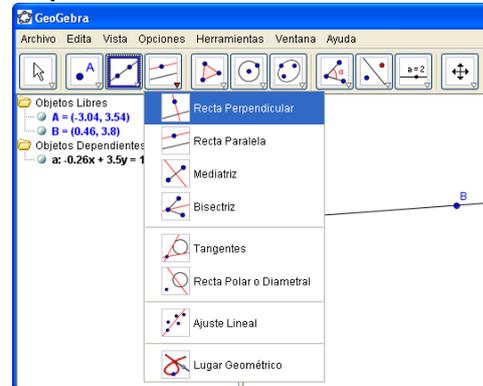


Luego seleccionamos el segmento o recta y elegimos por donde pasará la recta paralela.

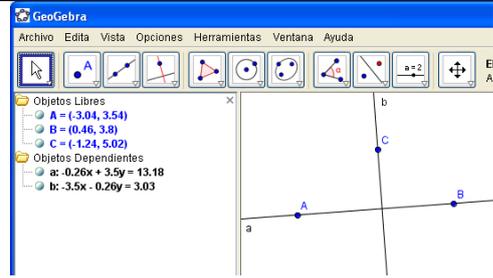


## Para construir una recta perpendicular

Creamos un segmento o una recta, luego clicamos en el cuarto icono, se despliega un grupo de herramientas. Seleccionamos **Recta Perpendicular**.



Luego seleccionamos el segmento o recta y elegimos por donde pasara la recta perpendicular.



## Apéndice III: Instrumento 3. La Mediatriz en el Geogebra

### GUÍA N° 3 DE MATEMÁTICAS LA MEDIATRIZ EN EL GEOGEBRA 1° DE ESO

NOMBRE: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_/04/2010

#### ACTIVIDAD GEOGEBRA

(I)

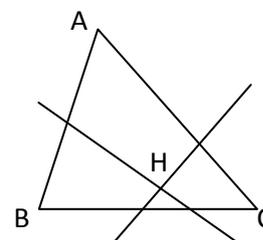
- Construye . Construye la mediatriz de siguiendo los pasos que se indican:
  - Construye el punto medio de , llámalo M.
  - Construye la perpendicular de que pasa por M.
- Desplaza los puntos A y B y observa las modificaciones de la figura. La recta que has dibujado, ¿Mantiene la condición de mediatriz de , es perpendicular en el punto medio? Si es así, la construcción es correcta; si no, deberás repetir la construcción.
- Comprueba, sobre la construcción que tienes en la pantalla, que los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del segmento. Sigue los pasos que se indican:
  - Construye un punto P en la mediatriz. Construye los segmentos PA y PB, mídelos y comprueba que miden lo mismo.
  - Mueve el punto P de la mediatriz y comprueba que los segmentos PA y PB siguen midiendo lo mismo.
  - Mueve los extremos A y B del segmento y comprueba que los segmentos PA y PB siguen midiendo lo mismo.
  - Dibuja un segmento y construye la mediatriz utilizando la herramienta de mediatriz.

#### LA MEDIATRIZ EN EL TRIANGULO USO DEL GEOGEBRA

#### ACTIVIDAD 1

(I)

- Construye un triángulo ABC y pinta de color rojo sus lados.
- Construye dos mediatrices del triángulo.
- Marca el punto de intersección de las dos mediatrices.
- Llama H al punto de intersección de las dos mediatrices.
- Construye la otra mediatriz del triángulo y comprueba que también pasa por el punto H (**circuncentro del triángulo**).
- Desplaza los puntos A, B y C para comprobar que las tres mediatrices se siguen cortando en el punto H.



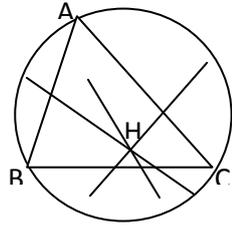
II) Mide los ángulos del triángulo. Observa las modificaciones de la figura al desplazar los puntos A, B o C y di donde está situado el circuncentro (en el interior del triángulo, en el exterior del triángulo o en un lado) según el tipo de triángulo (acutángulo, obtusángulo o rectángulo)

- Relaciona el lugar donde se cortan las mediatrices con la clasificación de los triángulos según sus ángulos. Completa la siguiente tabla:

Clasificación de los triángulos según sus ángulos	Se cortan las mediatrices	¿Dónde se cortan las mediatrices?
Acutángulos		
Rectángulos		
Obtusángulos		

III)

- a) Construye la circunferencia de centro  $H$  que pasa por  $A$ . comprueba que también pasa por  $B$  y  $C$ , es decir que es la circunferencia circunscrita al triángulo.
- b) Desplaza los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para comprobar que la circunferencia sigue estando circunscrita al triángulo.



## ACTIVIDAD 2

3. Un estudio de la superficie marina demostró que frente a la costa entre Barcelona y Valencia se ha detectado un yacimiento petrolífero de gran magnitud. La empresa petrolífera ubicara un estación de bombeo dentro del yacimiento que enviara el preciado metal a estas dos ciudades, pero esta debe estar ubicada de tal forma que las conexiones mediante tuberías sea la misma a las dos ciudades. ¿Dónde debería estar ubicada la estación de bombeo?
4. La ciudad de la Palma está muy interesada por tener petróleo desde este yacimiento, es así que pide que se le envíe también. ¿Cuál sería la nueva ubicación de la estación de bombeo para que las distancias sean las mismas a las tres ciudades? simula las situaciones en el Geogebra.



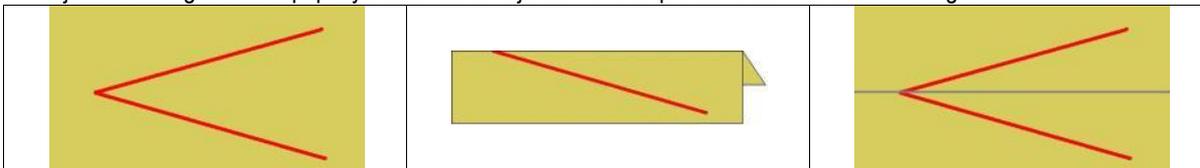
## Apéndice IV: Instrumento 4. La Bisectriz.

### GUÍA N° 4 DE MATEMATICAS LA BISECTRIZ 1° DE ESO

NOMBRE: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_/04/2010

#### ACTIVIDAD 1

Dibujamos un ángulo en un papel y doblamos la hoja de manera que coincidan los lados del ángulo:



1. ¿Cómo divide la línea formada por el doblar al ángulo?

---



---

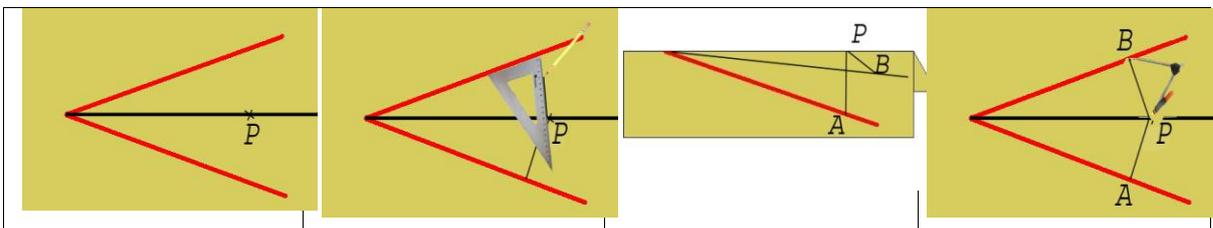
¿Qué te sugiere la línea que queda demarcada por el doblar con respecto al ángulo?

---



---

#### ACTIVIDAD 2



#### ACTIVIDAD 3

- Coge un papel, recórtalo de tal manera que formes un triángulo.
- Dobra desde el vértice al lado opuesto del triángulo, de manera que coincidan los lados. Marca esa línea con un lápiz.
- a) ¿Qué observas en el primer doblar?

---



---

Al repetir el proceso anterior pero con otro vértice. (marcar la línea con un lápiz).

- a) ¿Existe intersección de las líneas? \_\_\_\_\_
- b) ¿Qué puedes concluir del tercer doblar con respecto a la intersección?

---

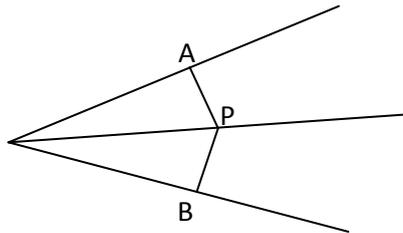


---

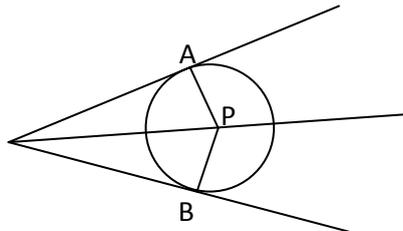
- **La intersección de las tres bisectrices se llama incentro.**

#### ACTIVIDAD 4 (uso de Geogebra)

- I) a) Construye dos semirrectas de origen común. Usa la herramienta *Bisectriz* (selecciónala en el 4° icono) para construir la bisectriz del ángulo agudo que determina las dos semirrectas.  
**Indicación:** Para construir la bisectriz, debes indicar el ángulo mediante tres puntos: un punto en un lado, el vértice y un punto en el otro lado.
- b) Comprueba que la recta que has construido es la bisectriz del ángulo, es decir, que lo divide en dos ángulos iguales (mide los ángulos)
- c) Mueve las semirrectas y comprueba que la recta que has trazado sigue siendo la bisectriz del ángulo.
- d) Borra las medidas que aparecen en la pantalla.
- II) Comprueba, sobre la construcción que tienes en la pantalla, que los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo. Sigue los pasos que se indican:
- a) Construye un punto  $P$  en la bisectriz. Construye segmentos  $PA$  y  $PB$  que miden la distancia de  $P$  a cada lado del ángulo, mídelos y comprueba que miden lo mismo.  
**Indicación:** Para construir  $PA$ :
2. Construye la recta que pasa por  $P$  y es perpendicular a un lado del ángulo.
  3. Llama  $A$  al punto de la intersección de esta y este lado.
  4. Construye segmento  $PA$  y  $PB$ .
  5. Esconde la recta  $PA$ . (**Indicación:** presiona el botón derecho del ratón y selecciona *Muestra Objeto*)
- b) Mueve el punto  $P$  de la bisectriz y comprueba que los segmentos  $PA$  y  $PB$  siguen midiendo lo mismo.
- c) Mueve las semirrectas que determinan los lados del ángulo y comprueba que los segmentos  $PA$  y  $PB$  siguen midiendo lo mismo.



- III) Construye la circunferencia de centro  $P$  que pasa por  $A$ . comprueba que también pasa por  $B$ .

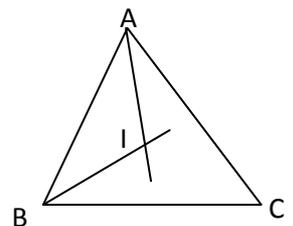


- IV) Construye una recta y un punto fuera de ella. ¿Cuál será la distancia desde el punto a la recta?

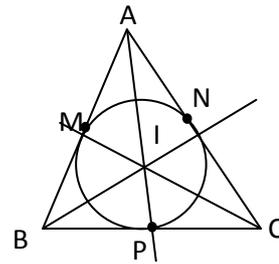
**LA BISECTRIZ EN EL TRIANGULO**  
**USO DEL GEOGEBRA**

**ACTIVIDAD 1**

- I) a) Construye un triángulo  $ABC$  y pinta de color rojo sus lados.
- b) Construye dos bisectrices del triángulo.
- c) Llama  $I$  al punto de intersección de las dos bisectrices.
- d) Construye la otra bisectriz del triángulo y comprueba que también pasa por el punto  $I$  (incentro del triángulo)



- e) Desplaza los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para comprobar que las tres bisectrices se siguen cortando en  $I$ .
- II) Mide los ángulos del triángulo. Observa las modificaciones de la figura al desplazar los puntos  $A$ ,  $B$  o  $C$  y di donde está situado el incentro (en el interior del triángulo o en el exterior) según el tipo de triángulo (acutángulo, obtusángulo o rectángulo)
- III) a) Construye los puntos  $M$ ,  $N$  y  $P$  en cada lado del triángulo.  
 b) Construye los segmentos  $IM$ ,  $IN$  y  $IP$ , luego mide la distancia de cada segmento.  
 c) Desplaza cada punto de manera que las tres medidas sean iguales.  
 d) Construye la circunferencia de centro  $I$  que pasa por  $M$ . Comprueba que también pasa por  $N$  y  $P$ , es decir, que es circunferencia inscrita en el triángulo.  
 e) Desplaza los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para comprobar que la circunferencia sigue estando inscrita en el triángulo.

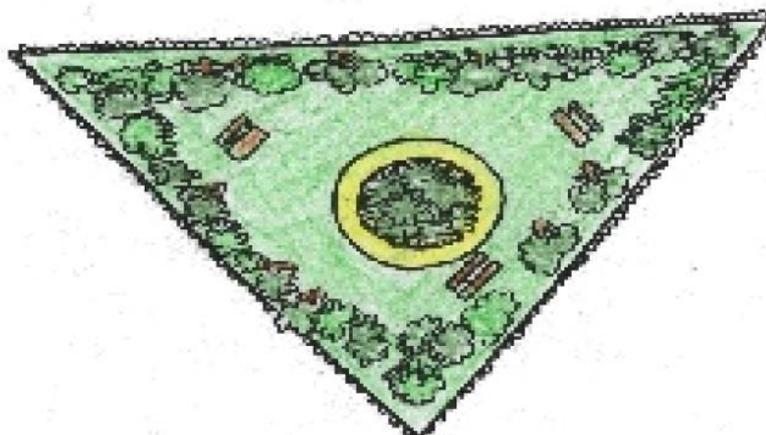


## ACTIVIDAD 2

1. Quieren poner un camping de forma circular junto al camino que cruza los arroyos Aguafría y Fresquillo. En el centro del camping estará ubicado un mirador. ¿Dónde debería situarse el mirador para que estuvieran a la misma distancia de los dos arroyos, en línea recta? Dibuja el camino más corto que debe unir el camping y los arroyos.



2. Raquel desea construir en su jardín (triangular) una pista circular lo mayor posible.
- a) ¿Sabrías ayudarle a situarla?



- b) ¿Qué procedimiento emplearías para resolver este problema?

## Apéndice V: Instrumento 1 resuelto por alumno 1

GUÍA N° 1 DE MATEMÁTICAS  
1º DE ESO

NOMBRE: \_\_\_\_\_ FECHA: 19/04/2010

MATERIALES \_\_\_\_\_

- Cuerda, Lápiz, transportador, escuadra, fichas y cuaderno.

**ACTIVIDAD 1:**

Tenemos una hoja con dos puntos A y B, una cuerda y un conjunto de fichas.  
Coloca una moneda de tal manera que las distancias de esta a los puntos sea la misma (equidistancia de los puntos). Haz lo mismo con las siguientes fichas.

1. ¿Qué particularidad ves en este conjunto de fichas al observar cómo están colocadas?

Que están a la misma distancia del punto A y del punto B. Y además están a la misma distancia entre ellas.

2. ¿Qué sucede si pones la cuerda sobre las fichas entre la primera y la última?

a. ¿Podrías decir que las fichas están alineadas? ¿Por qué?

Se parecen una línea. Sí, porque están rectas.

b. ¿Si queremos agregar más fichas sin medir (sin cuerda) que cumplan esta condición donde la pondrías? ¿por qué?

Justo en medio de A y B. Es el sitio más fácil, y así continuando por debajo.

**ACTIVIDAD 2:**

En un papel marca dos puntos A y B y el segmento que los une  $\overline{AB}$ . Luego coge el papel y dóblalo colocando el punto A sobre el B marcando la línea. Comprueba con la cuerda las distancias entre los puntos A y B y uno o dos puntos de la línea.

1. ¿Qué características tienen los puntos de esta línea con respecto a los puntos A y B?

Que regular la mediatriz.

2. ¿Puedes asociar la actividad 1 con la actividad 2?

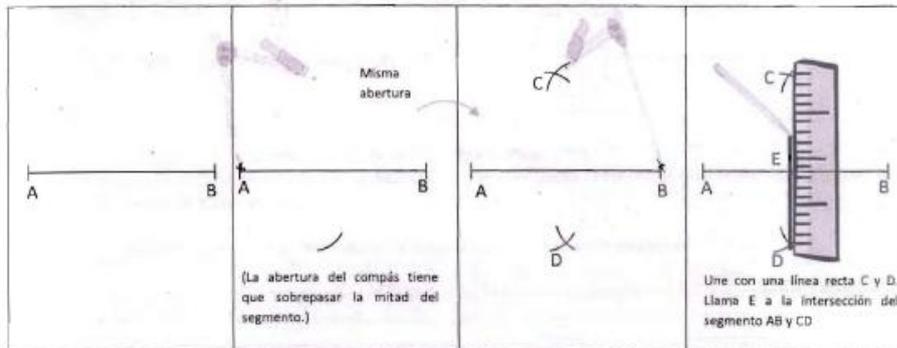
Sí, el punto A y el B están a la misma distancia de la línea.

**ACTIVIDAD 3:**

1. Hemos dibujado dos puntos y el segmento que los une, si hemos doblamos la hoja de manera que los puntos A y B coincidan, vemos que queda marcada una recta. que llamamos mediatriz del segmento AB. ¿Cómo puedes explicar que es la mediatriz de un segmento AB?

El segmento que une a los puntos A y B por medio.

Sigue los siguientes pasos para construir la mediatriz de un segmento con regla y compas.



a) ¿Qué podemos decir del punto C respecto de los puntos A y B?

*Está en medio de A y B*

b) ¿Qué podemos decir del punto D respecto de los puntos A y B?

*En medio de A y B*

c) ¿Qué podemos decir del punto E respecto de los puntos A y B?

*Está en medio de A y B*

d) ¿Por qué la recta que pasa por C y D es la mediatriz?

*Por que pasa por el medio*

e) ¿Es cierto que la mediatriz corta al segmento AB en el punto medio E?

*Si*

f) Comprobar con la escuadra o transportador que el ángulo formado por el segmento AB y la recta CD es de  $90^\circ$ . ¿Mide  $90^\circ$ ?

*Si*

g) ¿Podemos decir que la mediatriz de un segmento es la perpendicular en su punto medio?

*Si*

h) ¿Fuiste capaz de dibujar la mediatriz? Si tu respuesta es negativa explica porque no fuiste capaz de dibujarla.

*Si*

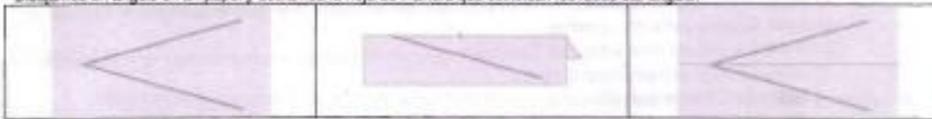
# Apéndice VI: Instrumento 2 resuelto por alumno 1

GUÍA N° 4 DE MATEMÁTICAS  
LA BISECTRIZ  
1º DE ESO

NOMBRE: \_\_\_\_\_ FECHA: 22/04/2010

**ACTIVIDAD 1**

Dibujamos un ángulo en un papel y doblamos la hoja de manera que coincidan los lados del ángulo:



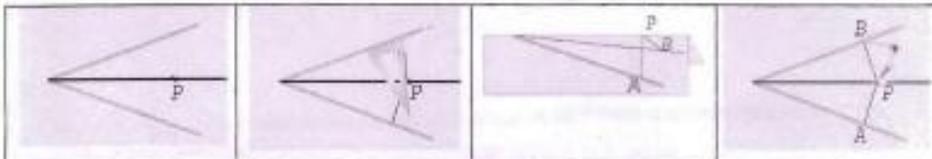
¿Cómo divide la línea formada por el doblez al ángulo?

*Divide el ángulo en 2 partes iguales*

¿Qué te sugiere la línea que queda demarcada por el doblez con respecto al ángulo?

*la bisectriz*

**ACTIVIDAD 3**



**ACTIVIDAD 2**

- Coge un papel, recórtalo de tal manera que formes un triángulo.
- Dobla desde el vértice al lado opuesto del triángulo, de manera que coincidan los lados. Marca esa línea con un lápiz.

a) ¿Qué observas en el primer doblez?

*Es la bisectriz del primer ángulo*

- Al repetir el proceso anterior pero con otro vértice. (marcar la línea con un lápiz).

a) ¿Existe intersección de las líneas? *Si*

b) ¿Qué puedes concluir del tercer doblez con respecto a la intersección?

*Es el punto de la bisectriz, el incentro*

- La intersección de las tres bisectrices se llama incentro.

**ACTIVIDAD 2 (uso de Geogebra)**

- a) Construye los semicírculos de origen común. Usa la herramienta Bisectriz (seleccionala en el 4º icono) para construir la bisectriz del ángulo agudo que determina las dos semicírculos.

**Indicación:** Para construir la bisectriz, debes indicar el ángulo mediante tres puntos: un punto en un lado, el vértice y un punto en el otro lado.

## Apéndice VII: Transcripción entrevista Alumno 1.

Entrevista alumno 1	
PP	: Te gustan las matemáticas.
AA	: no
PP	: No te gustan, ya, ¿por qué no?
AA	: Porque no sé, me aburro.
PP	: Si, pero yo te veo que eres bueno, en matemáticas. Y ¿cuál es la, bueno aparte de ser aburrida según tu, si las clases hubiesen sido más entretenida en algún momento te hubiesen gustado?
AA	: si
PP	: Si, ya. Eso quiere decir que las actividades que hicimos el otro día acá, ¿te gustaron o no te gustaron?
AA	: Si por qué no hay una marcha, son clases diferentes.
PP	: entonces las clases así te gustarían las matemáticas
AA	: sí
PP	: ¡sí!
PP	: Cuando trabajamos los materiales como la ficha, la cuerda, el papel, el transportador, el compas, ¿te gusto?
AA	: sí
PP	: Si, que más te llamo la atención de las actividades que hicimos en clases.
AA	: Pues lo del ordenador, lo del geogebra que no lo conocía yo.
PP	: No lo conocías.
AA	: no.
PP	: Y te entusiasmaría a trabajarlo en casa.
AA	: si
PP	: ¿Cuando trabajamos con la primera guía que es la guía de la mediatriz, te quedo clara la definición de la mediatriz?
AA	: si
PP	: ¿Y me la podrías explicar?
AA	: La mediatriz es una línea que está en medio de un segmento.
PP	: ¿Y por qué esta en el medio?
AA	: por que... no sé, porque se llama mediatriz por lo tanto esta en el medio,
PP	: Jajajaja por el nombre solamente y no hay alguna característica especial que tenga esa línea, alguna cosilla extra que además de que pase por el medio según tu, cierto. ¿Te paso un papel y me puedes dibujar la mediatriz?
AA	: si
PP	: dame un momento.
AA	: Esa es.
PP	: ¿y por que la construiste ahí?
AA	: no lo sé porque a lo mejor pasa por el medio
PP	: Ya dijiste que al ojo pasa por el medio.
PP	: y por que la construiste así y no así.
AA	: No se.
PP	: Porque yo te puedo decir: no la mediatriz puede ser así también. Ahí está el medio según tu cierto y esta es la mediatriz.
AA	: si
PP	: ¿Por qué tiene que ser así? Porque tú la dibujaste así.
AA	: No sé, porque siempre la he hecho así.
PP	: ya
PP	: ¿Entonces no se te ocurre nada más con respecto a la mediatriz? ¿Te acuerda cuando usamos las fichas?
AA	: ¿Qué fichas?
PP	: Las fichas esas que usamos con la cuerda. ¿Cómo fuiste colocando las fichas?
AA	: En un triangulo.
AA	: si la bisectriz esta aquí y de aquí.
PP	: Ya, ¿que fuiste haciendo?, porque en un momento les dije que tenían que agregar más fichas.
AA	: Medimos así, ponías la cuerda, luego la volvías a medir a una distancia de aquí y de aquí.
PP	: vale, ¿cómo son estos segmentos?
AA	: Perpendiculares.
PP	: sus medidas
AA	: iguales
PP	: ¿Cómo harías para colocar otra ficha?
AA	: pues haría otra vez, si fueran iguales tomaría la medida así

PP	: Por ahí deje un trozo de pita. ¿como lo harías?
AA	: así.
PP	: Ya. Y si tú tiraste una línea desde el círculo que construiste hacia este que esta acá. ¿Cómo serian sus medidas?
AA	: iguales
PP	: ¿Por qué?
AA	: Porque van al mismo sitio.
PP	: yo construyo esto y construyo esto y te digo son iguales y porque, por que van al mismo sitio.
AA	: no
PP	: ahhh
AA	: están al medio
PP	: construye otro círculo, pero utilizando otra medida. Utilizando estos mismo círculos.
AA	: siempre
PP	: Otro más. Construye cuatro en total, pero no en el mismo lugar, varia la posición.
	Alumno dibuja
PP	: ¿Cuánto construiste?
AA	: 6
PP	: construye dos más
AA	: ya
PP	: voy a repetir lo que tu acabas de hacer, arbitrariamente colocaste un punto ahí, arbitrariamente significa que lo colocaste así al azar prácticamente, lo colocaste ahí. Ya, cogiste la cuerda he hiciste así
	luego te olvidaste de la medida e hiciste así, ¿sale la intersección?
AA	: nooo jaja
PP	: ¿cómo sería lo correcto?, pesco la cuerda, tengo una medida determinada, la ubico acá, tratando de hacer un círculo, por ahí más o menos, sin perder esa medida me dirijo al otro extremo, y hago exactamente lo mismo. Más o menos queda por acá la cosa. ¿Te das cuenta la diferencia?
AA	: sí
PP	: ¿Por qué?, ¿qué diferencia hay con lo que hiciste tú?
AA	: Porque yo tome una medida diferente a esta.
PP	: vale ¿qué hice yo?
AA	: tu, guardaste la medida
PP	: ¿Qué te faltó entonces?
AA	: guardar la medida
PP	: Si sigo haciendo esto, me encontrare con un punto, y con puntos así, cierto. Puntos hacia abajo. Por lo tanto tú me dices que este es el punto medio.
AA	: si, si es el punto medio
PP	: Pero yo te pregunto ahora, ¿es de 90 grados el ángulo que se forma ahí?.
AA	: si
PP	: ¿Por qué?
AA	: porque es un ángulo recto
PP	: Y ¿porque es recto?
AA	: jajaja, porque yo no he inventado los ángulos, porque es la mitad de 180 grados
PP	: Pero yo te puedo decir que esto mide 90 porque es la mitas de 180 grados, ¿la construcción está bien hecha?
AA	: si, pero el ángulo no mide 90 grados
PP	: muy bien, no es de 90 grados
PP	: entonces como puedes saber si es de 90 grados
AA	: Yo haría la bisectriz, mediría si mide 45 grados, usando un transportador universal para saber bien las medidas.
PP	: ya
PP	: ¿Las distancias desde este punto a los extremos, como son?
AA	: Iguales.
PP	: Siempre.
AA	: si
PP	: pasemos a la bisectriz, ¿la entendiste?.
AA	: si
PP	: ¿Como la entendiste? ¿Me la podrías explicar?
AA	: si
PP	: Te paso otro papel si quieres o me la explicas con palabras.
AA	: Otro papel, cuando te haces un ángulo es la línea, la semirecta que pasa por el medio que divide al ángulo en dos.
PP	: ¿En dos qué?
AA	: En dos ángulos.

PP	: 3 y 4, 1 y 4, 6 y 2
AA	: en 1 y 1, en partes iguales,
PP	: muy bien en dos partes iguales
PP	: Cuando utilizamos el geogebra te ¿ayudo para entender mas el concepto?
AA	: no
PP	: ¿O te basto con mirar o hacer este trabajo?
AA	: Con el trabajo este.
PP	: Con el trabajo de la guía, y ¿seguimos trabajando con el geogebra te ayudo aun mas?
AA	: si
PP	: O ya esta, basto y sobro para entender el concepto.
PP	: el uso del geogebra te gusto
AA	: si
PP	: ¿Lo entendiste?
AA	: si
PP	: ¿O no te llama la intención?
AA	: si lo entendí, pero tampoco me llama la atención
PP	: vale
PP	: ¿Pero tuviste dificultades al usarlo?
AA	: no
PP	: ¿te ayudo el geogebra al resolver los problemas que nos planteamos ese día?
AA	: no
PP	: por ejemplo el del problema del yacimiento de petróleo
AA	: aa bueno ese sí
PP	: ¿Y el de las bisectrices?
AA	: no
PP	: en el caso del camping
AA	: no ese,
PP	: ese no lo hiciste
AA	: sí que lo hice pero no me ayudo a resolverlo
PP	: si no hubiésemos utilizado el geogebra para resolver el problema del yacimiento de petróleo, lo hubieses podido hacer sin el uso del geogebra
AA	: si
PP	: ¿Cómo?
AA	: pues haciendo la mediatriz
PP	: ¿Cómo lo harías?
AA	: como aquí,
PP	: Te pasare un papel para que me expliques en el dibujo, ¿sin el geogebra como lo harías?
AA	: ¿La primera o la segunda?
PP	: la primera
AA	: hubiese hecho la línea de aquí a aquí. Luego hubiese hecho lo del hilo, aquí
PP	: muy bien hecho, perfecto
PP	: Si ahora agregamos al problema la ciudad de Mallorca, ¿qué hubieses hecho?
AA	: hubiese hecho uniendo todos los puntos y trazando la bisectriz de cada punto y el punto de intersección es la respuesta.
PP	: ose a tú dices que para resolver el problema primero utilizamos le mediatriz y luego utilizamos la bisectriz
AA	: bueno con la mediatriz
PP	: ósea que la pregunta tiene dos respuesta, una con la mediatriz y otra con la bisectriz
AA	: No solo la mediatriz.
PP	: ¿Cuándo usaste el geogebra para trabajar este problema te ayudo a imaginarte como era la actividad?
AA	: si, por que lo tenía delante de la pantalla
PP	: ya o sea te ayudo aun mas a entender el problema
AA	: si
PP	: ¿Te acuerda donde quedaba el circuncentro en el triangulo rectángulo?
AA	: no
PP	: ¿Y el incentro?
AA	: Tampoco.
PP	: Muy bien es todo.

## Apéndice VIII: Algunas Categorías encontradas en las entrevistas.

AGRADO POR LAS MATEMATICAS CAT1								
Alumno 1			Alumno 2			Alumno 3		
1	PP	¿Te agradan las matemáticas?	1	PP	: Te gustan las matemáticas.	4	PP	: Bueno he la idea de esta entrevista es poder sacar algunas conclusiones de cómo te sentiste tus al momento de hacer las actividades que desarrollamos en el aula de informática y además de preguntar algunas cosas generales de lo que vimos ahí. Una de las primeras preguntas que siempre me gusta hacer es el grado de gusto por las matemáticas.
2	AA	Sí, pero no tanto.	2	AA	: no	5	AA	: Hombre las matemáticas me gustan, pero hay veces que me aburro y otras veces son más difíciles y me cuesta.
3	PP	¿Por qué no tanto?	3	PP	: No te gustan, ya, ¿por qué no?	6	PP	: Y ¿cuando se te hace difícil?
4	AA	bueno porque no son mi fuerte	4	AA	: Porque no sé, me aburro.	7	AA	: Cuando, bueno, se me hace pesado entonces me cuesta pensar y se me hace difícil también.
5	PP	a vale, y por qué no son tu fuerte	5	PP	: Si, pero yo te veo que eres bueno, en matemáticas. Y ¿cuál es la, bueno aparte de ser aburrida según tu, si las clases hubiesen sido más entretenida en algún momento te hubiesen gustado?	8	PP	: ¿Dame un ejemplo de alguna materia que te haya costado más?
6	AA	porque se me hace difícil las mates	6	AA	: si	9	AA	: Por ejemplo las operaciones con fracciones, me costaron de aprender.
			7	PP	: Si, ya. Eso quiere decir que las actividades que hicimos el otro día acá, ¿te gustaron o no te gustaron?	10	PP	: ¿Pero las lograste entender?
			8	AA	: si por qué no hay una marcha, son clases diferentes.	11	AA	: si
			9	PP	: entonces las clases así te gustarían las matemáticas	12	PP	: O sea te tienes esforzar un poco más para poder entender las cosas.
			10	AA	: sí	13	AA	: si

11	PP	: ¡Sí!	14	PP	: ¿y cuál dirías tú que son las materias que te hacen sentir mejor, que tienen que tener esas materias?
			15	AA	: un profesor que le guste explicar las cosas bien, depende de los temas, porque bueno yo soy de naturales sociales, y nada.
			16	PP	: Entonces la forma de explicar te ayuda muchísimo a ti.
			17	AA	: Mucho, en la forma de hacer los deberes, porque da ánimos te estimula.
			18	PP	: Entonces si se te presentan una clase donde solo hable el profesor.

USO DE MATERIAL DIDACTICO CAT2					
Alumno 1		Alumno 2		Alumno 3	
7	PP	¿En general como has encontrado las actividades que vimos en clases?	12	PP	: Cuando trabajamos los materiales como la ficha, la cuerda, el papel, el transportador, el compas, ¿te gusto?
8	AA	divertidas	13	AA	: sí
9	PP	¿Té gustaron?	14	PP	: Si, que más te llamo la atención de las actividades que hicimos en clases.
10	AA	sí	15	AA	: Pues lo del ordenador, lo del geogebra que no lo conocía yo.
11	PP	¿Por qué?	16	PP	: No lo conocías.
12	AA	Es algo diferente que cuando hacemos clases teóricas no, no manejamos ordenadores y ni hablamos en voz alta, son ejercicios y explicaciones y ya está.	17	AA	: no.
13	PP	eso quiere decir que el uso de materiales didácticos no lo usan mucho	18	PP	: Y te entusiasmaría a trabajarlo en casa.
14	AA	no, nunca, de hecho no habíamos venido nunca a los ordenadores	19	AA	: si
			38	PP	: ya, ahora yéndonos a las materia que trabajamos en clases
			39	PP	: El conjunto de actividades que presente, las guía el uso del ordenador, ¿cómo las encontraste?
			40	AA	: Muy bien, porque la guía también nos ayudo mucho, porque depende los grupos que seamos, hay algunos grupos que van más rápido y otros que van más lento, si no estuviera la guía tendrías que ir explicando, y tenderíamos a ir atrasado.
			41	PP	: ¿Y tú en que grupo de te podrías colocar en los rápidos o lentos?
			42	AA	: yo creo que en los rápidos
			43	PP	: si yo igual creo que en los rápidos
			44	PP	: Esta misma materia si la hubieses trabajado en la sala sin este tipo de implementaciones, ¿cómo te hubieses sentido?
			45	AA	: pues igual que siempre, bueno trabajando, pero no con las misma ganas que si lo estuviésemos haciendo con los ordenadores.

15	PP	Pero estamos hablando solamente de matemáticas.
16	AA	Bueno, sí, de todas maneras de otras materias tampoco ocupamos los ordenadores, porque tampoco hacemos informática este año.
17	PP	Con respecto a las guías que trabajamos acá, el uso de los materiales que utilizamos te resulto interesante.
18	AA	Si, por que es algo manual y es algo más divertido de hacer.

46	PP	: ¿Pero igual hubieses logrado entender los conceptos?
47	AA	: si
48	PP	: o ¿los conceptos que vinos acá?
49	AA	: si
50	PP	: cuando trabajos con el material manipulable lo que son las fichas, las cuerdas, bueno la reglas todo ese tipo de material. ¿Cómo te sentiste ahí?
51	AA	: mmmm no sé, me costó hacerlo.
52	PP	: ¿y lo de las fichas?
53	AA	: si
54	PP	: ¿eso fue lo más complicado?
55	AA	: si más complicado, pero aparte de una actividad con fichas y con piezas de manipular, pues también agrada a los alumnos
56	PP	: ¿y a ti?
57	AA	: a mí también.
58	PP	: Pero ¿te costo en un principio lograr entender el concepto de cómo era la idea?
59	AA	: si

CONCEPTO DE MEDIATRIZ CAT3								
Alumno 1			Alumno 2		Alumno 3			
19	PP	Vamos ahora a algunos conceptos claves.	20	PP	: ¿cuando trabajamos con la primera guía que es la guía de la mediatriz, te quedo clara la definición de la mediatriz?	60	PP	: eh cuando trabajamos la mediatriz, ¿la entendiste cuando trabajos con las fichas y la cuerda o la entendiste cuando la vimos en el geogebra?
20	PP	cuando trabajamos con la mediatriz, y utilizamos las cuerdas, con las fichas, se te vino inmediatamente alguna idea de cómo era la mediatriz	21	AA	: si	61	AA	: con las fichas ya la entendí, pero con el geogebra ya lo vi del todo, sabes.
21	AA	no, directamente no.	22	PP	: ¿y me la podrías explicar?	62	PP	: entonces el geogebra te ayudo enormemente
22	PP	que paso, que tuviste que hacer para que pudieses entender, si es que llegaste a entender el concepto de mediatriz	23	AA	: la mediatriz es una línea que está en medio de un segmento.	63	AA	: mucho, si por que no es como con la mano que tienes que hacer todas las líneas y todo eso, si no que con el geogebra con un clic y tienes todo hecho.

23	AA	cuando lo hice con las fichas	24	PP	: ¿y por qué esta en el medio?	64	PP	: serias capaz de explicar ¿en qué consiste la mediatriz?
24	PP	¿Cuando lo hiciste con las fichas, que hiciste con las fichas?	25	AA	: por que... no sé, porque se llama mediatriz por lo tanto esta en el medio.	65	AA	: si
25	AA	pues hacer un triangulo y juntar la cuerda con las tres fichas	26	PP	: Jajajaja por el nombre solamente y no hay alguna característica especial que tenga esa línea, alguna cosilla extra que además de que pase por el medio según tu, cierto. ¿Te paso un papel y me puedes dibujar la mediatriz?	66	PP	: si te paso una hoja en blanco y te digo dibuja una mediatriz.
26	PP	Si yo te hago un diagrama acá, tú me dices que hiciste algo como esto. Teníamos la línea, cierto así, teníamos dos fichas acá. Y con las cuerdas fuiste midiendo. Y teníamos la ficha acá.	27	AA	: si	67	AA	: una mediatriz
27	AA	si	28	PP	: dame un momento.	68	PP	: no se, hazlo como a ti se te venga la mente.
28	PP	Y con la cuerda fuiste midiendo, ¿cierto?	29	AA	: esa es.	69		Alumno dibuja
29	AA	si	30	PP	: ¿y por que la construiste ahí?	70	AA	: bueno, sería una línea recta, tenemos los puntos aquí y trazamos una línea. Pero me confundo con la mediatriz a la bisectriz... aaa solo la mediatriz, con el compas hacemos...
30	PP	Ya, ahora te salieron dos fichas, una a cada lado. Aquí. Cierto	31	AA	: no lo sé porque a lo mejor pasa por el medio	71	PP	: pero que características tienen esas dos crucecitas que hiciste ahí...porque las marcaste ahí.
31	AA	si, y solo tuve que unirla esta para encontrar la mediatriz	32	PP	: ya dijiste que al ojo pasa por el medio.	72	AA	: porque es el medio del segmento

32	PP	¿Cómo encontrarte esta punto acá y este otro acá?	33	PP	: y por que la construirte así y no así.	73	PP	: a vale, entonces esas líneas que lo que hacen con respecto a la línea que trazaste así. ¿Esta línea que le hace a este segmento?
33	AA	pues midiendo con la cuerda	34	AA	: no se.	74	AA	: la corta por el medio
34	PP	y como mediste con la cuerda, te acuerdas	35	PP	: porque yo te puedo decir: no la mediatriz puede ser así también. Ahí está el medio según tu cierto y esta es la mediatriz.	75	PP	: aa vale lo corta por el medio, o sea este pedacito o este trozo es igual a...
35	AA	no	36	AA	: si	76	AA	: este trozo.
36	PP	¿Como lo hiciste?	37	PP	: ¿por qué tiene que ser así? Porque tú la dibujaste así.	77	PP	: a vale, y si yo escojo un poco acá
37	AA	Pues si tenía los puntos, y así, hice una marca luego hice así e hice otra marca.	38	AA	: no se, porque siempre la he hecho así.	78	AA	: si
38	PP	cogiste la cuerda de extremo a extremo o utilizaste una medida diferente	39	PP	: ya	79	PP	: y trazos líneas desde aquí hasta acá y desde aquí a acá, ¿cómo son las líneas ellas?
39	AA	más pequeña				80	AA	: iguales.
40	PP	utilizaste una dimensión más pequeña, en qué momento				81	PP	: muy bien
41	AA	pues cuando tenía que medirlo						
42	PP	cuando tenías que medirlos, ya veamos ahora en el papel						
43	PP	ubica un punto de tal forma que comencemos a trabajar con la mediatriz						
44	AA	pues sería con el compas						
45	PP	pero solo tenemos la cuerda						
46	AA	pues, no se						

47	PP	no sabes, yo te voy a enseñar un poco, hay, hay, haremos y podemos hacer como una circunferencia ya, vamos a marcar y la otra también hay
48	PP	hay te va a quedar una intersección
49	PP	ahora me olvido de la otra dimensión, y puedo escoger un trozo más largo inclusive, a ya, pero lo escogeremos más pequeño, por aquí, la misma hay, y tengo mi intersección,
50	PP	¿qué hago ahora?
51	AA	unirlos, unir los puntos
52	PP	al unir las estos punto estas dos puntos con una línea, que es lo que pasaba, acá tenemos un segmento
53	AA	pues que formaban ángulos de 90 grados
54	PP	Muy bien, como sabes que miden ángulos de 90 grados. Como llegas a saber esto
55	AA	porque son algunos rectos
56	PP	y como lo sabes
57	AA	pues mirando
58	PP	Pero claro, tu puedes decir y ooh a ya miro 90, pero ¿será cierto?, como tú ¿puedes comprobar que mide 90?
59	PP	¿Pero cómo saber si es cierto?
60	AA	con el transportador
61	PP	muy bien
62	PP	¿Pero como sabes que mide 90?
63	AA	no lo se
64	AA	pues porque son totalmente perpendiculares
65	PP	no sabes, no pasa nada

66	PP	Las distancias que hay desde aquí, hasta este punto hasta aquí. Como son.
67	PP	Si yo trazo un punto desde acá hasta aquí como son.
68	AA	son iguales
69	PP	¿Por qué?
70	AA	porque tienen la misma distancia, por que cuando habías hecho lo de la cuerda, la mide con la misma distancia
71	PP	muy bien, eso quiere decir que si yo trazo otra línea a este punto y desde este punto a este punto, ¿cómo son?
72	AA	iguales