

PROBABILITATS I PARADOXES: DOS EFECTES DE L'APASSIONANT AVENTURA DE PENSAR LA INCERTESA.

Josep Lluís Solé

Universitat Autònoma de Barcelona.

UAB. 27 d'abril de 2013

Els homes sempre han temut la incertesa i s'han preocupat per l'atzar que governava les seves vides.

- No hem d'estranyar-nos que l'atzar pugui tan sobre nosaltres, si considerem el fet que vivim i som per atzar. (Sèneca)
- Què és l'home? Un vaixell exposat a tots els ultratges de la Fortuna.
- Tot és atzar. Com al joc de daus, veig homes amb fortuna i d'altres sense sort. (Electra, Eurípides)

Els nostres avantpassats grecs i romans van divinitzar-lo.

Tyché i Fortuna

Tyche d'Antioquia







Què és l'atzar? Per què hi ha incertesa?

És potser un problema del nostre coneixement?

Una intel·ligència que en un moment determinat conegués totes les forces que regeixen a la Natura, i la situació respectiva de tots els éssers que la componen, si fos suficientment gran per a analitzar totes aquestes dades, podria abraçar en una sola fórmula els moviments dels cossos més grans de l'Univers i els de l'àtom més lleuger. Res li seria incert, i tant el futur com el passat estarien presents davant dels seus ulls. (Laplace)

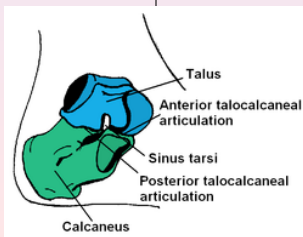
És una qualitat intrínseca de la Natura?

La moderna Física Quàntica, la Física del món de l'àtom i de les partícules elementals, considera que la incertesa és pròpia de la Natura.

I believed that indeterminism, that is the nonvalidity of rigorous causality, is necessary, and not just consistently possible.
(Heisenberg).

El que no està rodejat d'incertesa és impossible que sigui cert.
(Feynmann)

Els homes sempre han jugat. El primer aleatoritzador és un os del taló anomenat astragalus. En les excavacions arqueològiques se n'ha trobat entre 10 i 50 vegades més que els altres ossos.



En una tomba egípcia de 3500 anys abans de Crist hi ha pintats un home i una dona jugant.

Tenen 4 cares, no iguals, amb puntuacions 1, 3, 4, 6.

La millor jugada era treure, al tirar-ne quatre, 1, 3, 4, 6. (Venus), i la pitjor quatre uns. (gos)

Propertius (50BC) Jo esperava que em surtis un Venus amb els tali favorables, però l'odiat gos sortia sempre.



Daus

Els daus més antics (3000 BC) han estat trobats a Shahr-e Sukhta, al Sur-est d'Iran.



- Mesopotàmia (2700BC)
- Egipte (1370BC)
- Els romans hi eren molt aficionats. L'emperador August va prohibir jugar-hi excepte en les Saturnàlies. Horaci crítica al joves que juguen a daus en lloc de dedicar-se a les coses de profit.
- A l'època medieval si jugava molt. Sant Lluís, rei de França, els va prohibir.



أزفار

- De Vetula, de Richard de Fournival(1200-1250), és el primer estudi sobre daus.
- Liber de Ludo Alae de Cardano (1501-1576).
- Galileu (1613-1624). Sopra la Scoperta de Dadi.



Com ens atrevim a dir coses sobre l'atzar? No és l'atzar l'antítesi de tota llei? (Bertrand, al pròleg del Calcul des Probabilités de Poincaré.)

ELS MATEMÀTICS SÓN VALENTS I TEMERARIS. S'HAN ATREVIT I ENS ATREVIM ENCARA!!!!

El naixement de la TEORIA DE LA PROBABILITAT es produeix al segle XVII, amb la correspondència entre Fermat i Pascal, que durà del juny—juliol fins al setembre—octubre de 1654, per a respondre a les preguntes d'un jugador aristòcrata, el cavaller de Méré.

Je n'ai pas le temps d'envoyer la demonstration d'une difficulté qui etonnait fort M. de Méré, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre, et ça, comme vous savez, est un grand default.

Pascal i Fermat



Fermat
(1601-1665)



Pascal
(1623-1662)

Un problema relacionat amb els jocs d'atzar, proposat a un auster jansenista (Pascal) per un home de món (cavaller de Méré), fou l'origen del Calcul de Probabilitats. El seu objectiu era determinar la proporció amb la que s'havia de dividir una aposta entre els jugadors, si el joc acaba abans de la seva finalització...(Poisson, 1837)

La paraula **probabilitat** va ser utilitzada per primera vegada com una mesura numèrica al llibre de A. Arnauld i P. Nicole anomenat La Logique ou l'Art de Penser (1662)

Oratorio Sammagloriano.
LA LOGIQUE
Ex dono R. P. V. Thomassini.

L'ART DE PENSER:

*Contenant, outres les regles communes,
plusieurs observations nouvelles
propres à former le
jugement.*

TeD
B.^{III}.n.^o 223.



A PARIS,

Chez IEAN DE LAVNAY,
sous le Porche des Écoles
de Sorbonne.

M. DC. LXII.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

És remarcable que una ciència que començà amb l'estudi dels jocs d'atzar hagi esdevingut un dels més importants objectes del coneixement humà. (P. Simons, marquès de Laplace (1812))

La probabilitat és el bon sentit aplicat al càlcul.



Figura : Pierre Simon, marquès de Laplace (1749-1827)

Com els matemàtics modelen la incertesa?

Explicarem sense masses detalls quina és l'axiomàtica introduïda per Kolmogorov el 1933. Davant d'un experiment aleatori considerem el conjunt de tots els resultats, que anomenem Ω . Per exemple, en el cas del llançament d'una moneda Ω serà

$$\Omega = \{Cara, Creu\}$$

- MONEDA

$$\Omega = \{Cara, Creu\}$$

- DUES MONEDES.

$$\Omega = \{(cara, cara), (cara, creu), (creu, cara), (creu, creu)\}$$

- DAU

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Un esdeveniment serà una afirmació que fem sobre el resultat del nostre experiment tal que, una vegada realitzat aquest, podem dir si s'ha complert o no. Per exemple en el cas d'un dau, obtenir un número par serà un esdeveniment.

Si en el llançament del dau tan sols podem veure si surt una puntuació par o imparell, l'afirmació "obtenir un dos o un quatre" no serà un esdeveniment, ja que no podrem assegurar sempre si s'ha produït o no (si obtenim una cara par no sabem si ha estat un dos o un quatre, o ha estat un sis.)

A un esdeveniment li podem associar el subconjunt de Ω format pels resultats que satisfan l'afirmació lligada a l'esdeveniment. Com a mostra, a obtenir una cara par en tirar un dau li associem el conjunt $\{2, 4, 6\}$.

Notem que el que ens descriu l'experiment és el conjunt de tots els esdeveniments, ja que moltes vegades podem pensar en distints conjunts Ω associats.

La probabilitat és un número entre 0 i 1 que assignem als esdeveniments i que ens indica la facilitat que aquest es produeixi.

- Si és segur que surt, la probabilitat serà 1.
- Si és impossible, serà 0.
- Aquesta assignació no la podem fer de qualsevol manera si volem el dret de dir-li probabilitat. Per a que podem parlar de probabilitat s'ha de complir que

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\text{no passi l'esdeveniment}) = 1 - P(\text{passi})$
- $P(\text{passi l'esdeveniment A o el B}) = P(\text{passi A}) + P(\text{passi B})$,
si A i B no poden passar a la vegada.
Això ho escriurem de la següent manera,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad \text{si } A \cap B = \emptyset$$

Quina és la probabilitat que assignem a un esdeveniment?
DEFINICIÓ CLÀSSICA.

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}$$

Per tant es redueix a un problema de comptar.
En el cas d'una moneda, la probabilitat que surti cara serà

$$\frac{1}{2}$$

En un dau, la probabilitat que surti un 5 o un 6 serà

$$\frac{2}{6}$$

Llançament de dos daus

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)



P(suma sigui 7) serà:

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

P(suma sigui 2 o 3) serà:

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$



Problema de l'aniversari

Quina és la probabilitat que en un grup de k persones n'hi hagi almenys dos que facin els anys el mateix dia?

Aquest problema fou plantejat per Von Mises el 1930.

Considerem $2 \leq k \leq 365$. Si hi ha més de 365 persones és segur que hi ha alguna coincidència.

Calcularem la probabilitat que no hi hagi cap coincidència.

1	2	3	...	k
365	365	365	...	365
1	2	3	...	k
365	364	363	...	$365 - k + 1$

Casos possibles: 365^k

Casos favorables: $365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365 - k + 1)$

$P(\text{almenys una coincidència}) = 1 - P(\text{cap coincidència}) =$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365 - k + 1)}{365^k} = \\ &= 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times 2 \times 1}{365^k \times (365 - k)(365 - k - 1) \times \dots \times 1} = \\ &= 1 - \frac{365!}{365^k \times (365 - k)!} \end{aligned}$$

k	p	k	p
5	0,0027	25	0,569
10	0,117	30	0,706
20	0,411	50	0,970
22	0,476	60	0,994
23	0,507	100	0,9999997

Problema:

Si tu ets una persona entre les k que hi ha dins el grup, quina és la probabilitat que alguna altra faci el seu aniversari el mateix dia que tu?

Ara la resposta serà diferent, i necessitarem almenys que k sigui 254 per a que aquesta probabilitat superi a 0.5

Per què?

Ja es plantejà en un manuscrit del 1380.

Luca Paccioli en 1494 la tornà a plantejar en la "Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proporcionalita."

PROBLEMA: DOS JUGADORS JUGUEN A UN JOC ON TENEN LA MATEIXA PROBABILITAT DE GUANYAR O PERDRE. POSEN SOBRE LA TAULA LA MATEIXA QUANTITAT I DECIDEIXEN QUE S'HO EMPORTARÀ TOT QUI ARRIBI PRIMER A SIS VICTORIES. EL JOC S'INTERROMP QUAN VAN 5 A 3. COM S'HAN DE DIVIDIR LES APOSTES?

Tartàglia digué 2 a 1

Paccioli digué 5 a 3.

Peveroni digué 6 a 1.

Fermat i Pascal proposen 7 a 1.

En la situació en què deixen de jugar, necessitarien com a màxim tres partides més per a estar segurs que algú arriba a 6 victories.

X	X	X	X	X	-
X	X	X	-	-	-

$$5 \Rightarrow 6, \quad a = 1$$

$$3 \Rightarrow 6, \quad b = 3$$

Aquests 3 jocs poden anar de 8 maneres diferents.

- Casos favorables al primer jugador.

AAA, AAB, ABB, ABA, BAB, BAA, BBA

- Casos favorables al segon jugador,

BBB

La proporció és 7 a 1.

Pascal va generalitzar-lo. Si al primer jugador li falten a punts per guanyar i al segon b , s'hauran de jugar com a màxim $a + b - 1$ jocs suplementaris.

El primer jugador guanya si en aquests $a + b - 1$ jocs obté a punts o més.

El segon jugador guanya si en aquests $a + b - 1$ jocs obté b punts o més.

Qüestió: De quantes maneres pot el primer jugador obtenir a punts o més en $a + b - 1$ jocs?

Hem de triar a o més caselles entre $a + b - 1$ per posar A's.
Si tenim n caselles de quantes maneres en podem triar k per posar A's?

1	2	3	...	k
n	n-1	n-2	...	n-k+1

Surten $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - k + 1)$, però l'ordre no és important.

1	2	...	k
k	k-1	...	1

Això implica que hem de dividir per $k \times (k - 1) \times \dots \times 2 \times 1 = k!$

Per tant ens queda

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Multiplicant el numerador i el denominador per $(n-k)!$ obtenim

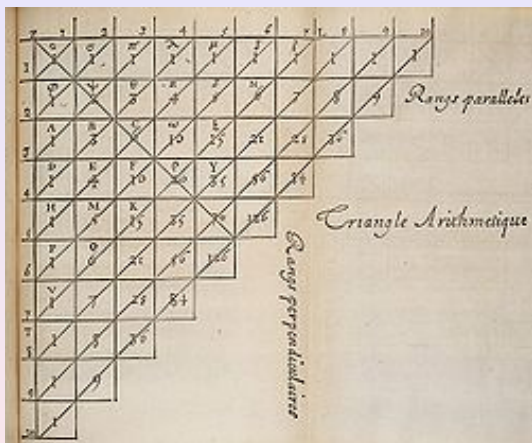
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

					1					
				$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$				
			$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$			
		$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$		
	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$	
$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{5}{4}$		$\binom{5}{5}$

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Coneixeu aquest triangle?

- Per primera vegada apareix en el segle X en un comentari de Halayudha sobre el *Chandas Shastra*, un llibre indi escrit en sànscrit per Pingala potser en el II BC.
- Bhattotpala (1068) torna a parlar-ne, insistint en el seu significat combinatori.
- A Iran surt a l'obra de Al-Karaji (953-1029), i del poeta i matemàtic Omar Khayyam (1048-1131)
- A Xina és citat en l'obra de Jia Xian (1010-1070) i en la de Yang Hui (1238-1298)
- Per primera vegada a Europa, en l'obra de Petrus Apianus (1495-1552) sobre càlcul comercial
- A Itàlia se'l coneix com el triangle de Tartaglia (1500-1577)
- El *Traité du triangle arithmétique* de Pascal va ser publicat postumament el 1655.



Per tant en el nostre cas $n = a + b - 1$, i $k = a, a + 1, \dots, a + b - 1$.

Ho podem fer de les maneres següents

$$\binom{a+b-1}{a} + \binom{a+b-1}{a+1} + \binom{a+b-1}{a+2} + \dots + \binom{a+b-1}{a+b-1}$$

i això es igual a

$$\binom{a+b-1}{0} + \binom{a+b-1}{1} + \binom{a+b-1}{2} + \dots + \binom{a+b-1}{b-1}$$

De la fila $a+b-1$ del triangle sumem els $b-1$ termes primers!!!!

Paradoxa de la proporció

El chevalier de Méré ja sabia que la probabilitat de treure un 6 al tirar un dau era $\frac{1}{6}$, i la de tenir un doble sis al tirar dos daus $\frac{1}{36}$.

Si tirem un dau 4 vegades, la probabilitat de tenir almenys un sis és

$$1 - P(\text{ningún 6}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} = 0.5177..$$

Per tant és favorable apostar a aquest esdeveniment, i no ho és si tirem el dau 1, 2 o 3 vegades. A aquest valor 4 l'anomenem el **valor crític**.

La probabilitat de treure un doble sis en 24 tirades de dos daus és

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914..$$

per tant desfavorable, i això implica que 24 no és el **valor crític** d'aquest experiment.

PREGUNTA: ¿Per què no és vàlida la regla de la proporció dels valors crítics (**Old Gambler's Rule**) que afirma que si la probabilitat baixa a la sisena part, el valor crític queda multiplicat per 6?

Aquesta regla afirma que si considerem dos jocs amb probabilitats respectives de guanyar p_1 i p_2 , els valors crítics C_1 i C_2 compleixen la relació

$$C_1 p_1 = C_2 p_2 \Rightarrow C_2 = \frac{C_1 p_1}{p_2}$$

En el nostre joc $C_1 = 4$, $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{36}$, i per tant $C_2 = 24$.

Això no funciona!!!

Aquest problema ja l'havia estudiat Cardano.

Plantegem-lo en general. Si en un joc tenim una probabilitat p de guanyar, que en k repeticions independents almenys guanyem una vegada, té una probabilitat

$$1 - (1 - p)^k$$

Aquesta expressió és creixent amb k , i volem veure quan supera o arriba a 0.5.

$$(1 - p)^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\ln 2}{\ln(1 - p)}$$

Desenvolupant per Taylor tenim

$$x = \frac{\ln 2}{p + \frac{p^2}{2} + \dots}$$

THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:

OR,
A Method of Calculating the Probability
of Events in Play.

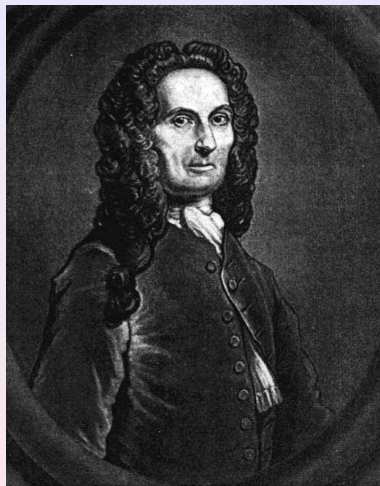


By *A. De Moivre*. F.R.S.

L O N D O N :

Printed by *W. Pearson*, for the Author. MDCCLXVIII.

Doctrine of Chances 1718



de Moivre 1667-1754

Tan sols si p és molt petit podem pensar $x \approx \frac{\ln 2}{p}$, és a dir, podem considerar la proporcionalitat. Aquesta és la regla que proposà De Moivre en el llibre Doctrine of Chances. Realment ens interessa $\lceil x \rceil$, és a dir l'enter més petit que és més gran o igual a x .

p	OGM	De Moivre	Fórmula exacta
$\frac{1}{2^{16}}$	144	150	150
$\frac{1}{36}$	24	25	25
$\frac{1}{6}$	4	5	4
$\frac{1}{4}$	3	3	3
$\frac{1}{2}$	2	2	1

Interpretació freqüencial

La definició que hem utilitzat té el problema que no prioritzen cap possible resultat. Però per exemple no ens serviria en els següents casos

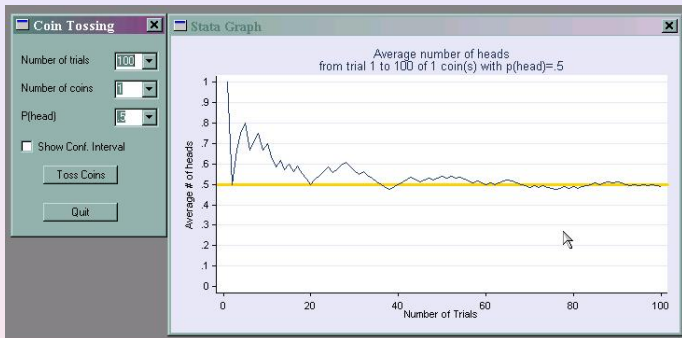
- Una moneda carregada de manera que la cara fos més probable que la creu.
- Probabilitat que una embarassada tingui bessonada.

INTERPRETACIÓ FREQÜENCIAL.

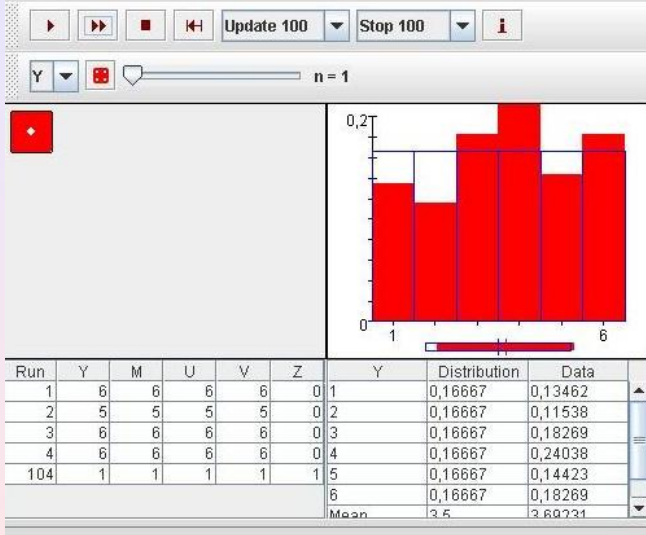
Si repetim l'experiment moltes vegades de manera *independent*, la quantitat

$$f_n(A) = \frac{\text{nombre de vegades que passa } A \text{ en } n \text{ experiments independents}}{n}$$

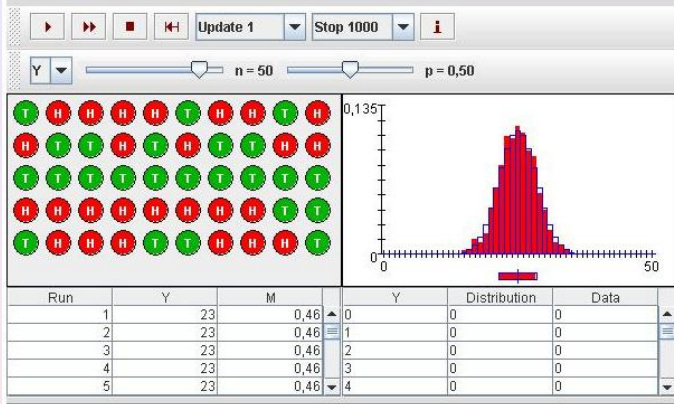
tendeix, quan n va a ∞ , cap a un cert número que li direm la probabilitat de l'esdeveniment A .



The Dice Experiment



The Binomial Coin Experiment



<http://www.math.uah.edu/stat/applets/>

INTERPRETACIÓ SUBJECTIVA.

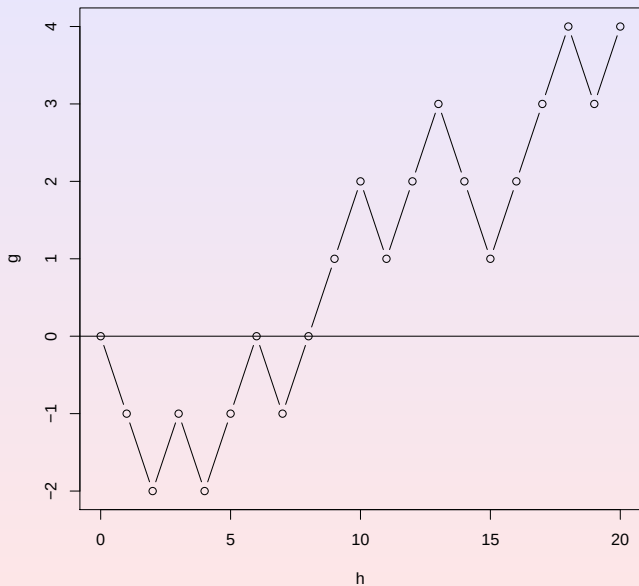
Hi ha vegades que no té sentit la repetició del mateix experiment. Aleshores la probabilitat depèn de la opinió que cada un té de la facilitat que es produeixi l'esdeveniment considerat.

SIGUI QUINA SIGUI LA INTERPRETACIÓ QUE FEM, EL TRACTAMENT MATEMÀTIC ÉS EL MATEIX.

Considerem ara situacions on el temps intervé, i estudiem com evoluciona la probabilitat

Sortint del zero, ens movem cada segon una unitat cap a la dreta o cap a l'esquerra segons si ens surt cara o creu en el llançament d'una moneda justa.

Una possible trajectòria podria ser la següent:



S_n representa la posició (coordenada) després de n llançaments del dau. És a dir

$$S_n = \text{número de cares} - \text{número de creus} = a - b$$

Conveni: $S_0 = 0$

Quins valors pot tenir S_n ?

S_0					0				
S_1				-1		1			
S_2			-2		0		2		
S_3		-3		-1		1		3	
S_4	-4		-2		0		2		-4

Si n és par, els possibles valors de S_n són els parells entre $-n$ i n .

Si n és imparell, els possibles valors de S_n són els imparells entre $-n$ i n .

Si després de n llançaments volem ser a la posició x , el número de cares i creus que han de sortir satisfan les equacions

$$\left. \begin{array}{l} n = a + b \\ x = a - b \end{array} \right\}$$

Per tant,

$$a = \frac{n + x}{2}$$
$$b = \frac{n - x}{2}$$

Aquestes solucions només tenen sentit si a i b són enters

1	2	3	...	n
2	2	2	...	2

Casos possibles: 2^n

Casos favorables a que en n llançaments surtin a cares ($a \leq n$)

(Raonarem com en el problema de la proporció):

Hem de triar $a = \frac{n-x}{2}$ caselles per posar les cares.

1	2	3	...	a
n	n-1	n-2	...	n-a+1

Surten $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-a+1)$ Però l'ordre no és important.

Això implica que hem de dividir per $a \times (a-1) \times \dots \times 2 \times 1 = a!$

Tenim doncs,

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1)}{a!} = \binom{n}{a}$$

Per tant la probabilitat que en n tirades estem a la posició x és

$$\binom{n}{a} \times 2^{-n} = \binom{n}{\frac{n-x}{2}} \times 2^{-n}$$

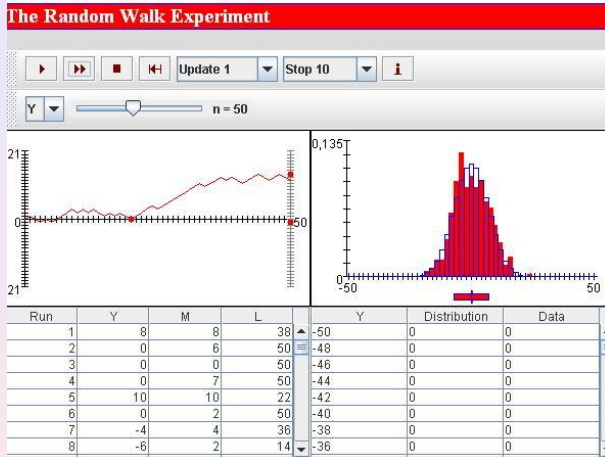
					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Per a tenir la probabilitat, la primera fila la multipliquem per $\frac{1}{2^0}$,
la segona per $\frac{1}{2^1}$, i la fila i per $\frac{1}{2^{i-1}}$.

Qüestió: Pensem ara en la probabilitat que S_n valgui zero, es a dir que la marxa talli a l'eix horitzontal en el temps n . Evidentment $n = 2m$, ja que hi han d'haver tantes cares com creus.

$$P(S_{2m} = 0) = \binom{2m}{m} 2^{-2m} = \frac{2m!}{(m!)^2} 2^{-2m}$$

$2m$	$P(S_{2m} = 0)$	$2m$	$P(S_{2m} = 0)$
10	0.1262	500	0.0178
20	0.0892	10^3	0.0126
50	0.0564	10^4	0.0040
100	0.0399	10^6	0.0004



<http://www.math.uah.edu/stat/applets/>

Fórmula de Stirling: Si n és gran, aleshores

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

El símbol $\sim$ vol dir que quan n és gran, el quocient dels dos termes va cap a 1.

Miraculosament, encara que n sigui petit aquesta fórmula és molt precisa.

n	$n!$	$\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$
1	1	0.9221
2	2	1.919
5	120	118.019

Aplicant-la obtenim

$$P(S_{2m} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

Cada vegada és més difícil que la marxa sigui nul·la, és a dir que el número de cares sigui igual al número de creus!!!

Qüestió: Ara volem veure quan es produeix el darrer zero si tenim una marxa fins el temps $2m$

Podem provar que

$$P(S_1 > 0, S_2 > 0, S_3 > 0, \dots, S_{2m} > 0) = \frac{1}{2}P(S_{2m} = 0)$$

Amb aquest resultat deduïm la probabilitat que, després de $2m$ moviments, el darrer zero s'hagi produït en el temps $2k, k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} P(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2m} \neq 0) &= \\ P(S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2m} \neq 0 | S_{2k} = 0)P(S_{2k} = 0) &= \\ P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2m-2k} \neq 0 | S_0 = 0)P(S_{2k} = 0) &= \\ P(S_{2m-2k} = 0)P(S_{2k} = 0). \end{aligned}$$

k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
0.1762	0.0927	0.0736	0.0655	0.0617	0.0606
k=10	k=9	k=8	k=7	k=6	k=5

Aplicant Stirling tenim

$$P(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2m} \neq 0) \sim \frac{1}{\pi \sqrt{k(m-k)}}$$

Dividint per $\frac{1}{m}$ el numerador i el denominador, tenim

$$\frac{1}{\pi \sqrt{k(m-k)}} = \frac{\frac{1}{m}}{\pi \sqrt{\frac{k}{m}(1 - \frac{k}{m})}}$$

Per tant

$$P(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2m} \neq 0) \sim \frac{1}{m} \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{k}{m}(1 - \frac{k}{m})}}$$

Si fem $x_k = \frac{k}{m}$, (igual a $\frac{2k}{2m}$, la proporció entre el temps del darrer zero i el temps final) aleshores definint

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}, \quad 0 < x < 1,$$

obtenim

$$P(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2m} \neq 0) \sim \frac{1}{m} f(x_k)$$

Si T és el temps del darrer zero abans de $2m$,

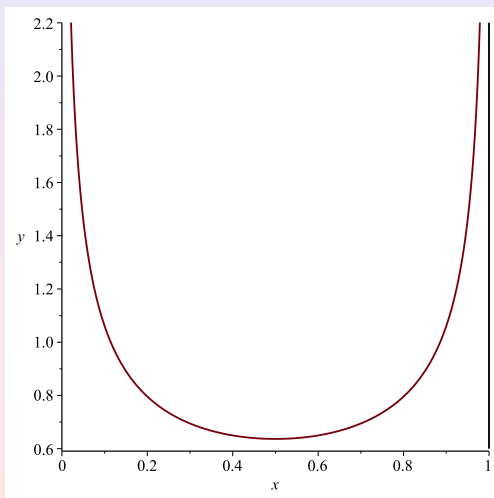
$$P\left(\frac{T}{2m} \leq x_0\right) = P\left(T \leq 2mx_0\right) = \sum_{x_k \leq x_0} \frac{1}{m} f(x_k) \approx \int_0^{x_0} \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx$$

I aquesta integral la sabem fer, i és

$$\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x_0}.$$

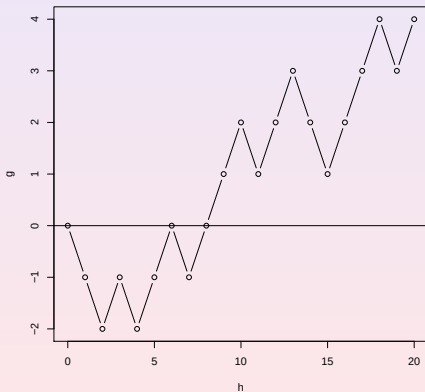
$$\sin(\arcsin x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\arcsin(\sin y) = y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$



Sigui Y_{2m} la fracció de temps en el qual la marxa està en el semiplà positiu, és a dir

$$Y_{2m} = \frac{1}{2m} \# \{1 \leq j \leq 2m : S_j > 0, S_j = 0 \text{ i } S_{j-1} > 0\}$$



Ens torna a sortir la llei anterior, és a dir per $k = 0, 1, \dots, m$

$$P(Y_{2m} = \frac{2k}{2m}) = P(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2m} \neq 0)$$

La probabilitat que en $2m$ passos la marxa no canvia de semiplà és

$$P(Y_{20} = 0) + P(Y_{20} = 1) = 0.1762 + 0.1762 = 0.352$$

La probabilitat que la marxa estigui la meitat del temps en un semiplà i l'altra meitat a l'altra és tan sols

$$P(Y_{20} = 0.5) = 0.0606$$

Sorprenent!!!

En una marxa aleatòria és segur que retornem infinites vegades a l'origen.

Sigui T_1 el temps del primer retorn a l'origen. Evidentment ha de ser un número parell.

$$P(T_1 = 2m) = P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2m-1} \neq 0, S_{2m} = 0)$$

$$P(T_1 = 2m) = \binom{2m}{m} \frac{1}{2m-1} 2^{-2m} \sim \frac{1}{(2m-1)\sqrt{\pi m}}$$

Això implica que

$$E(T_1) = \sum_{m \geq 1} 2m P(T_1 = 2m) = \infty!!!!$$

Si CS_{2m+1} és el número de canvis de signe en $2m + 1$ passos, podem provar que

$$P(CS_{2m+1} = r) = 2P(S_{2m+1} = 2r + 1), \quad r = 0, 1, \dots, m.$$

Veiem que per a tota m ,

$$P(CS_{2m+1} = 0) \geq P(CS_{2m+1} = 1) \geq \dots \geq P(CS_{2m+1} = m)$$

El més probable és que no hi hagi cap canvi de signe.

Sorprenent!!!

Si $2m + 1 = 99$,

Canvis de signe	probabilitat
0	0.1592
1	0.1529
2	0.1412
3	0.1252
4	0.1066
10	0.0174
13	0.0040

> x

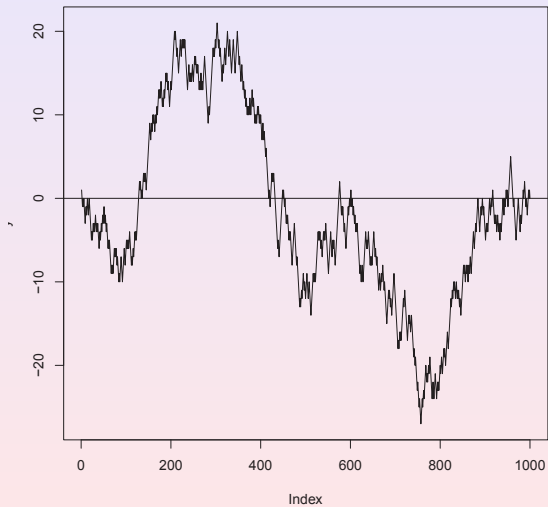
```

[1] 1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 1
[25] -1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1 -1 1 1
[49] -1 1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 1
[73] 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 1 1
[97] -1 -1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1
[121] -1 1 -1 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 -1 1 -1
[145] -1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 -1 1
[169] 1 -1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 -1 1 -1
[193] -1 1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 -1
[217] -1 1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1
[241] -1 -1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1
[265] -1 1 1 -1 -1 1 -1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1
[289] 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1
[313] -1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 1
[337] 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1
[361] -1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1
[385] -1 -1 -1 1 -1 1 -1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 1
[409] -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1
[433] -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1
[457] -1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1
[481] 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 -1 1 -1 1 1 -1
[505] -1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 1 1 1 1
[529] -1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 1
[553] 1 1 1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 1 1 1 1 1 1
[577] -1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 1 1 -1 1 -1
[601] 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1
[625] 1 1 -1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1
[649] 1 1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1
[673] -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 1 1 1 1
[697] 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1 1 -1 1 -1
[721] 1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1
[745] 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 1 1
[769] -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1
[793] 1 1 -1 1 -1 1 1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 1
[817] -1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 -1
[841] 1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1
[865] -1 1 1 -1 -1 1 1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 1 1 1 -1 -1 -1
[889] 1 1 1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1
[913] 1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1
[937] 1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 1 1 -1 1 -1 -1 1 1 1 1 1 -1 -1
[961] -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1
[985] 1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 1 -1 1 -1

```

> y

[1]	1	0	-1	0	-1	0	-1	-2	-3	-2	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	0
[19]	-1	-2	-3	-4	-5	-4	-5	-4	-3	-4	-3	-4	-3	-2	-3	-4	-3	-4
[37]	-3	-4	-5	-6	-5	-4	-5	-4	-3	-4	-3	-2	-3	-2	-1	-2	-3	-2
[55]	-3	-4	-3	-4	-5	-6	-5	-6	-5	-6	-7	-8	-9	-8	-9	-8	-9	-8
[73]	-7	-6	-7	-6	-7	-6	-7	-8	-7	-8	-9	-10	-9	-10	-9	-8	-7	-8
[91]	-9	-10	-9	-8	-7	-6	-7	-8	-7	-6	-5	-6	-5	-6	-5	-6	-5	-4
[109]	-5	-6	-7	-8	-7	-8	-7	-8	-7	-6	-5	-4	-5	-4	-5	-4	-3	-2
[127]	-1	0	1	2	1	2	1	0	1	0	1	2	3	2	3	2	3	2
[145]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8	7	8	9	8	9	10	9	10
[163]	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	13	12	13	12	13	14	13	12
[181]	11	12	11	12	13	12	13	14	15	14	15	14	13	14	13	12	11	12
[199]	13	14	13	14	15	16	17	18	19	20	19	20	19	18	17	18	17	16
[217]	15	16	17	18	19	18	17	18	19	18	19	18	19	18	19	18	17	16
[235]	15	14	13	14	15	16	15	14	15	14	15	14	15	16	15	14	15	16
[253]	17	16	17	16	15	16	15	16	15	14	13	14	13	14	15	14	13	14
[271]	13	14	15	16	17	16	15	14	13	12	11	10	9	10	11	10	11	12
[289]	13	14	15	16	17	18	17	18	17	18	19	18	19	20	21	20	19	18
[307]	19	18	17	18	17	16	15	14	15	16	15	16	17	18	17	16	17	18
[325]	19	20	19	18	17	18	19	18	17	16	15	16	17	18	19	18	17	16
[343]	15	16	17	18	19	20	19	18	17	16	17	16	15	14	15	16	15	14
[361]	13	14	13	12	13	12	11	12	11	10	11	10	11	10	11	12	11	10
[379]	11	12	13	12	11	12	11	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	10
[397]	9	10	9	10	9	8	7	8	9	8	7	8	7	6	5	6	5	4
[415]	3	2	1	0	1	0	-1	0	1	2	3	2	3	2	3	2	1	0
[433]	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-5	-6	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	0
[451]	1	0	-1	0	-1	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-4	-5	-4	-5	-4	-5	-6
[469]	-7	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-7	-8	-9	-10	-11	-12
[487]	-13	-12	-13	-12	-11	-12	-11	-10	-9	-10	-11	-10	-11	-12	-11	-10	-9	-10
[505]	-11	-12	-11	-10	-11	-12	-13	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-10	-9	-10	-9	-10
[523]	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-5	-4	-5	-4	-5	-6	-5	-6	-7	-6	-5	-4
[541]	-5	-4	-5	-4	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-5	-6
[559]	-7	-6	-5	-6	-5	-6	-7	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
[577]	1	0	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-3	-4	-3	-4	-5	-6	-5	-4	-3	-2
[595]	-1	-2	-1	0	-1	0	1	0	-1	0	-1	-2	-1	-2	-3	-2	-3	-4
[613]	-3	-4	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-8	-9	-10	-9	-8	-9	-10	-9	-8
[631]	-7	-6	-5	-4	-5	-6	-5	-6	-5	-4	-5	-6	-7	-8	-7	-8	-7	-8
[649]	-7	-6	-5	-4	-5	-6	-7	-6	-7	-8	-7	-8	-9	-10	-11	-10	-9	-10



Si p no és $\frac{1}{2}$, ja no podem aplicar la regla dels casos!!!

Si hem d'omplir n caselles amb 1's i -1's, el número de 1's estarà entre 0 i n .

Si volem posar exactament k 1's:

1	2	3	...	k
n	n-1	n-2	...	n-k+1

Surten $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1)$, però com sempre l'ordre no és important.

Això implica que hem de dividir per $k \times (k-1) \times \dots \times 2 \times 1 = k!$

Per tant tindrem

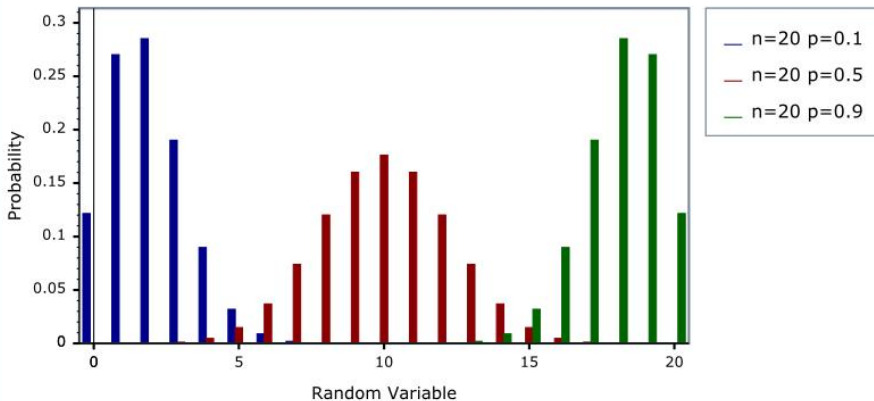
$$\binom{n}{k} \text{ maneres de posar } k \text{ 1's en } n \text{ caselles}$$

1	1	...	1	-1	...	-1
---	---	-----	---	----	-----	----

Aquesta tira té probabilitat $p^k(1 - p)^{n-k}$.
 Com hem vist que hi han $\binom{n}{k}$ tirs tindrem

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Binomial Distribution PDF



QÜESTIÓ: Suposem que juguem a un joc amb probabilitat p de guanyar. Quina serà la probabilitat de guanyar per primera vegada a la tirada n ?

Si suposem que les tirades no tenen res a veure (INDEPENDÈNCIA), la probabilitat de la seqüència de longitud n ,

$$\underbrace{P, P, \dots, P}_{n-1}, G,$$

és $(1 - p)(1 - p) \dots (1 - p)p = (1 - p)^{n-1}p$.

La probabilitat de no guanyar mai és $1 - P(\text{guanyar alguna vegada})$, i aquesta darrera és, si anomenem X a la tirada en la qual guanyem per primer cop,

$$P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = n) + \dots$$

Sumar infinits números no implica que la suma sigui infinita, si el que sumem és prou petit. Per exemple

$$0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots = 0,11111\dots = 0,\hat{1}$$

En el nostre cas sabem fer aquesta suma d'infinits sumands, la qual és del tipus $a_1, a_1 r, a_1 r^2, \dots, a_1 r^{n-1}, a_1 r^n, \dots$

Si en sumem els n primers termes

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1}$$

Multipliquem per r l'equació anterior,

$$rS_n = r(a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1}) = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n+1}$$

Restant tenim $(1 - r)S_n = a_1 - a_{n+1}$, i aïllant ens queda

$$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Si $r < 1$, i $n \rightarrow \infty$, aleshores la suma dels infinits termes és

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

En el nostre cas $a_1 = p$, i $r = 1 - p$. Per tant

$$p + p(1 - p) + p(1 - p)^2 + \dots = \frac{p}{1 - (1 - p)} = \frac{p}{p} = 1$$

La probabilitat de guanyar en un moment o altre és 1

Problema de la ruïna

Imagina que jugues a un joc on la probabilitat de guanyar és p , i per tant la de perdre és $q = 1 - p$. Si guanyen incrementem la nostra fortuna en un euro, i si perdem la disminuïm en la mateixa quantitat.

Comencem a jugar amb i euros, $0 \leq i \leq a$.

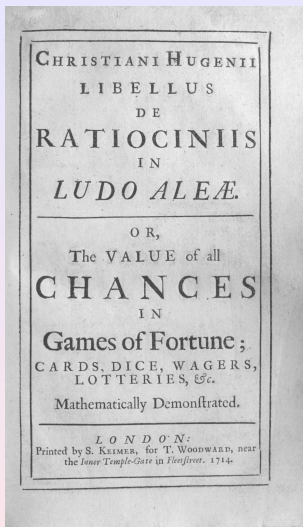
Anem jugant fins que arribem a tenir a euros o ens arruïnem.

Arruïnar-se vol dir arribar a 0 abans que a la barrera a .

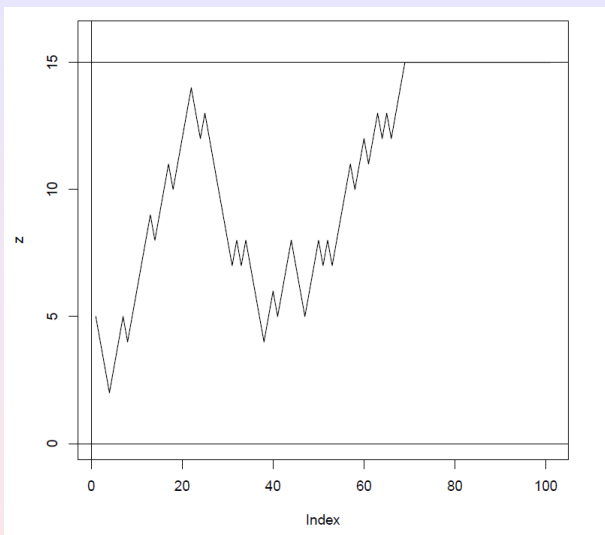
Aquesta qüestió fou plantejada per Cristiaan Huygens en el seu llibre *De ratiociniis in aleae ludo* en el problema 5.



Huygens 1629-1695



De Ratiotiniis in ludo Aleae



Anomenem q_i la probabilitat d'arruïnar-nos si comencem jugant amb i euros. Rera la primera partida tindrem $i + 1$ euros si guanyem, i $i - 1$ si perdem, per tant

$$\begin{aligned} &P(\text{arruïnar-nos sortint de } i) \\ &= P(\text{arruïnar-nos si guanyem en la primera tirada}) \\ &+ P(\text{arruïnar-nos si perdem en la primera tirada}) \\ &= P(\text{arruïnar-nos sortint de } i+1)P(\text{guanyar la primera tirada}) \\ &+ P(\text{arruïnar-nos sortint de } i-1)P(\text{perdre en la primera tirada}), \end{aligned}$$

Això ho podem escriure com

$$q_i = pq_{i+1} + qq_{i-1}.$$

Com $p + q = 1$ podem escriure

$$q_i = (p + q)q_i = pq_i + qq_i = pq_{i+1} + qq_{i-1},$$

i arreglant-ho tenim

$$p(q_{i+1} - q_i) = q(q_i - q_{i-1}).$$

Dividint per p ens queda

$$q_{i+1} - q_i = \frac{q}{p}(q_i - q_{i-1}), \text{ si } 1 \leq i \leq a - 1,$$

Anomenem q_0 a la probabilitat d'arruïnar-nos si el capital inicial és 0, i q_a si el capital inicial és a .

Evidentment $q_0 = 1$ i $q_a = 0$. Això són les condicions de contorn, i per tant podem escriure

$$q_2 - q_1 = \frac{q}{p}(q_1 - q_0) = \frac{q}{p}(q_1 - 1)$$

$$q_3 - q_2 = \frac{q}{p}(q_2 - q_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 (q_1 - 1)$$

$$q_i - q_{i-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} (q_1 - 1)$$

Ara utilitzem un truco si p i q són diferents. Sumem les equacions anteriors i tenim

$$\begin{aligned} q_i - q_1 &= \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right)(q_1 - 1) \\ &= \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \frac{q}{p}}(q_1 - 1). \end{aligned}$$

Si posem $i = a$, ens queda,

$$q_a - q_1 = -q_1 = \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \frac{q}{p}}(q_1 - 1).$$

que és una equació de la forma $-q_1 = K(q_1 - 1)$

Resolent-la ens queda $q_1 = \frac{K}{K+1}$, on $K = \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \frac{q}{p}}$ i per tant

$$q_1 = \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

Recordem que

$$\begin{aligned}q_i - q_1 &= \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right)(q_1 - 1) \\&= \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \frac{q}{p}}(q_1 - 1),\end{aligned}$$

Aïllant q_i , tenim

$$q_i = q_1 + \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \frac{q}{p}}(q_1 - 1).$$

Utilitzant l'expressió de q_1 obtinguda abans, i amb una mica d'àlgebra arribem a

$$q_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

Per a trobar la probabilitat que arribem primer a la barrera a , sortint de una fortuna i , tan sols hem d'intercanviar els papers de q i p , i els de les dues barreres.

Per tant

$$p_i = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{a-i} - \left(\frac{p}{q}\right)^a}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^a}.$$

Podem comprovar que $p_i + q_i = 1$, Això ens indica que SEMPRE arribem a una barrera o altra amb probabilitat 1, es a dir el joc s'acaba.

Hem dit que el raonament anterior no val per $p = q = \frac{1}{2}$. En aquest cas hem d'argumentar de manera diferent.

Sabem que

$$q_i - q_1 = \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right)(q_1 - 1).$$

Com $\frac{q}{p} = 1$,

$$\left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right) = 1 + \dots + 1 = i - 1.$$

Podem escriure

$$q_i - q_1 = (i - 1)(q_1 - 1).$$

Si $i = a$,

$$q_a - q_1 = -q_1 = (a - 1)(q_1 - 1).$$

Resolent aquesta equació tenim $q_1 = \frac{a-1}{a}$.

Finalment posant-ho a $q_i - q_1 = (i-1)(q_1 - 1)$ ens queda

$$q_i = 1 - \frac{i}{a},$$

quan $p = \frac{1}{2}$

Per a calcular la probabilitat d'arribar primer a la barrera superior raonem com abans, intercanviant i per $a-i$, i tenim

$$p_i = 1 - \frac{a-i}{a}$$

Fixeu-vos que la suma $p_i + q_i$ és 1. Això ens indica que sempre arribem també en aquest cas a alguna de les dues barreres.

Mirem ara un cas particular. Imaginem que tenim 100 euros i juguem fins que arribem a 110 o s'arruïnem. Suposem $q \neq p$. La fórmula que havíem trobat era

$$q_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

Aplicant-la al nostre cas, on $i = 100$ i $a = 110$, tenim

$$q_{100} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{100} - \left(\frac{q}{p}\right)^{110}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{110}}$$

Si $p = 0.493$ i $q = 1 - p = 0.507$, posant-ho en l'expressió d'abans ens dóna $q_{100} = 0.253$.

Si $p=q=\frac{1}{2}$, aleshores recordem que $q_i = 1 - \frac{i}{a}$.
Ara ens dóna $q_{100} = 0.091$, és a dir les coses canvien molt!!!!

p	q	i	a	q_i	p_i
0,5	0,5	9	10	0,1	0,9
0,5	0,5	90	100	0,1	0,9
0,5	0,5	900	1000	0,1	0,9
0,5	0,5	950	1000	0,05	0,95
0,5	0,5	8000	10000	0,2	0,8
0,45	0,55	9	10	0,210	0,790
0,45	0,55	90	100	0,866	0,134
0,45	0,55	99	100	0,182	0,818
0,4	0,6	90	100	0,983	0,017
0,4	0,6	99	100	0,333	0,667

En aquest quadre veiem en la darrera línia que si el joc ens és desfavorable, encara que sortim prop de la barrera superior, la probabilitat d'arruïnar-nos és important.

QÜESTIÓ. Quina és la quantitat que seria convenient d'apostar cada vegada per millorar la probabilitat d'arribar a la barrera superior abans que al zero (ruïna)?

Si en el cas estudiat apostem 2 euros en lloc de 1, podem adaptar les formules canviant 100 per 50 i 110 per 55.

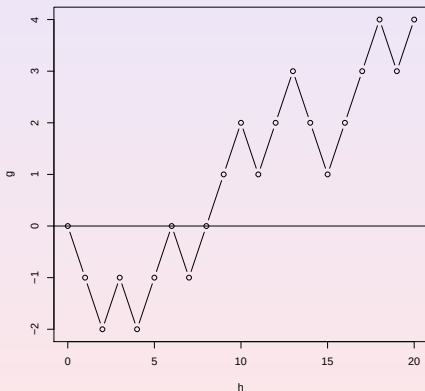
$$q_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{50} - \left(\frac{q}{p}\right)^{55}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{55}}$$

i ens dona un probabilitat d'arruïnar-nos de 0.165, quan abans era de 0,253.

Si apostem 5 euros cada cop, haurem de canviar el 100 i el 110 per 20 i 22, i ens quedarà una probabilitat de ruïna de 0,118. MILLOR!

La millor estratègia és jugar sempre a l'aposta màxima si el joc és desfavorable.

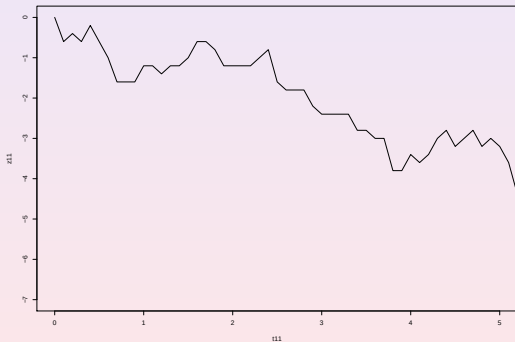
Generem una marxa aleatoria $\{S_n, n \geq 0\}$ tirant una moneda justa com abans i la considerem definida per al continu de temps interpolant com es veu en el gràfic



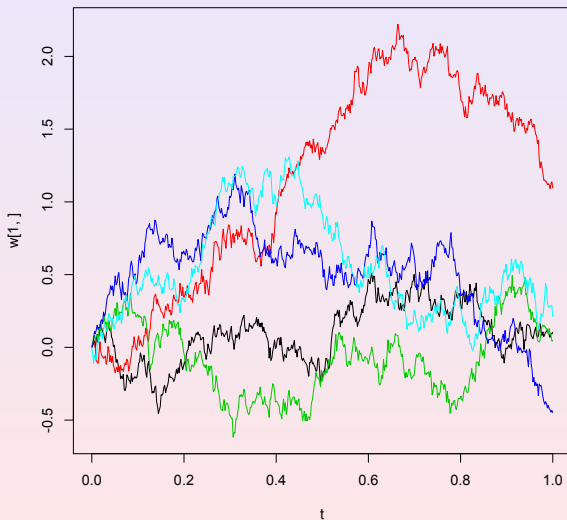
Si fem la següent transformació

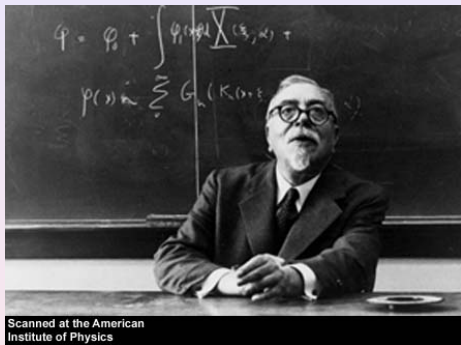
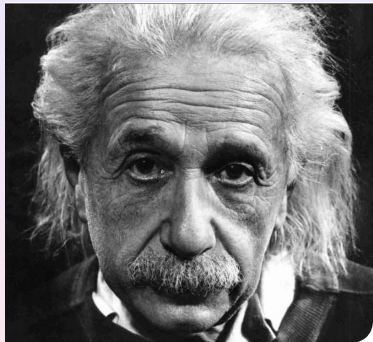
$$X_t^{(n)} = \frac{1}{n} S_{nt}$$

estem apretant les punxes.



Si passem al límit, és a dir ho fem infinites vegades, obtindrem coses com





La incertesa governa els mercats monetaris. Per exemple el canvi dol.lar-euro evoluciona aleatòriament amb el temps.



Sembla el gràfic d'abans, no?